

В. И. АРНОЛЬД
А. Н. ВАРЧЕНКО
С. М. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

ОСОБЕННОСТИ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ



В. И. АРНОЛЬД,
А. Н. ВАРЧЕНКО,
С. М. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Монодромия
и асимптотики интегралов

Под редакцией
В. И. АРНОЛЬДА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 336 с.

Теория особенностей дифференцируемых отображений— бурно развивающаяся область современной математики, являющаяся обобщением исследования функций на максимум и минимум и имеющая многочисленные приложения в математике, естествознании и технике (так называемые теории бифуркаций и катастроф). Монография является продолжением книги «Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов» тех же авторов, опубликованной издательством «Наука» в 1982 году. Она посвящена семействам комплексных гиперповерхностей, асимптотике интегралов многомерных методов стационарной фазы и перевала, приложениям методов алгебраической геометрии к исследованию критических точек функций.

Для математиков— научных работников, аспирантов, а также для специалистов в области механики, физики, техники и других наук, интересующихся теорией особенностей дифференцируемых отображений.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является продолжением книги Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.— М.: Наука, 1982 г. (при ссылке в тексте эта книга обозначается ОДО-1).

Если предыдущая книга содержала начала зоологии особенностей дифференцируемых отображений, т. е. была посвящена описанию того, где и какие особенности могут встречаться, то эта книга содержит элементы анатомии и физиологии особенностей дифференцируемых функций. Это означает, что в ней рассматриваются вопросы строения особенностей и их функционирования.

Другой отличительной чертой настоящей книги является упор на вопросы, для которых важен выход в комплексную область, в то время как первая часть посвящена темам, для большинства из которых не существенно, над каким полем (вещественным или комплексным) они рассматриваются. Такие вопросы, как, например, распадение особенностей, связь особенностей с алгебрами Ли, асимптотики различных интегралов, зависящих от параметров, становятся яснее в комплексной области.

Книга состоит из трех глав. В первой главе рассматривается топологическое строение изолированных критических точек голоморфных функций. Описываются основные топологические характеристики таких критических точек: исчезающие циклы, отмеченные базисы, матрицы пересечений, группы монодромии, оператор вариации — их взаимоотношения и методы вычислений.

Вторая глава посвящена исследованию асимптотик интегралов метода стационарной фазы, широко встречающихся в приложениях. Излагаются методы вычисления асимптотик, обсуждаются связи асимптотик с различными характеристиками критических точек фаз интегралов (разрешением особенностей, многогранниками Ньютона), приведены таблицы порядков асимптотик для критических точек фаз, которые расклассифицированы в предыдущей книге (в частности, для простых, унимодальных и бимодальных).

Третья глава посвящена интегральному исчислению на многообразиях уровня критической точки голоморфной функции. В ней рассматриваются интегралы голоморфных форм, заданных в окрестности критической точки, по циклам, лежащим на гиперповерхностях уровня функции. Интеграл голоморфной формы по циклу

голоморфно изменяется при непрерывной деформации цикла из одной гиперповерхности уровня в другую. Таким образом возникают многозначные голоморфные функции, заданные на комплексной прямой в окрестности критического значения функции. Оказывается, что асимптотики этих функций (т. е. асимптотики интегралов) при стремлении уровня к критическому связаны с разнообразными характеристиками исходной критической точки голоморфной функции.

Теория особенностей является обширной и быстро развивающейся областью математики, и мы не стремились затронуть все ее направления.

Список литературы содержит работы, непосредственно связанные с текстом (хотя иногда и не цитируемые в нем), а также работы, связанные с предыдущей книгой, но по тем или иным причинам не вошедшие в ее библиографию.

Авторы благодарны участникам семинара по теории особенностей МГУ, в особенности — А. М. Габриэлову, А. Б. Гивенталю, А. Г. Кушниренко, Д. Б. Фуксу, А. Г. Хованскому. Авторы благодарны также В. С. Варченко и Т. В. Огородниковой, оказавшим большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Авторы

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ФУНКЦИЙ

Введение

При топологическом исследовании изолированной критической точки комплексно-аналитической функции возникает задача описания топологии ее множества уровня. Топология множества уровня или множества меньших значений гладкой вещественнозначной функции на многообразии может быть исследована при помощи теории Морса (см. [78]). В ней изучаются перестройки множества меньших значений и множества уровня функции при прохождении критического значения. В комплексном случае при прохождении критического значения перестройки множества уровня не происходит, поскольку все неособые множества уровня, близкие к одному критическому, одинаковы как топологические пространства и даже как дифференцируемые многообразия. Комплексным аналогом теории Морса, описывающим топологию множества уровня комплексно-аналитической функции, является теория Пикара — Лефшеца (исторически возникшая раньше). В теории Пикара — Лефшеца основным изучаемым преобразованием является не прохождение критического значения, а обход вокруг него в плоскости $\mathbb{C}$ значений функции.

Зафиксируем окружность, обходящую вокруг критического значения. Каждая точка этой окружности является значением функции. Множества уровня, соответствующие этим значениям, образуют расслоение над окружностью. Обход окружности определяет отображение множества уровня над начальной точкой окружности в себя. Это отображение называется (классической) *монодромией* критической точки.

Простейшим содержательным примером, в котором все это можно явно увидеть и вычислить до конца, является функция двух переменных

$$f(z, w) = z^2 + w^2, \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2.$$

Она имеет единственную критическую точку $z = w = 0$. Критическое значение $f = 0$. Критическое множество уровня $V_0 = \{(z, w): z^2 + w^2 = 0\}$ состоит из двух комплексных прямых, пересекающихся в точке 0. Все остальные множества уровня

$$V_\lambda = \{(z, w): z^2 + w^2 = \lambda\} \quad (\lambda \neq 0)$$

топологически одинаковы: они диффеоморфны цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}^1$ (рис. 1).

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим риманову поверхность функции $w = \sqrt{\lambda - z^2}$ (рис. 2). Эта поверхность склеивается из

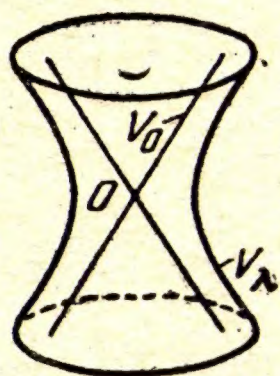


Рис. 1.

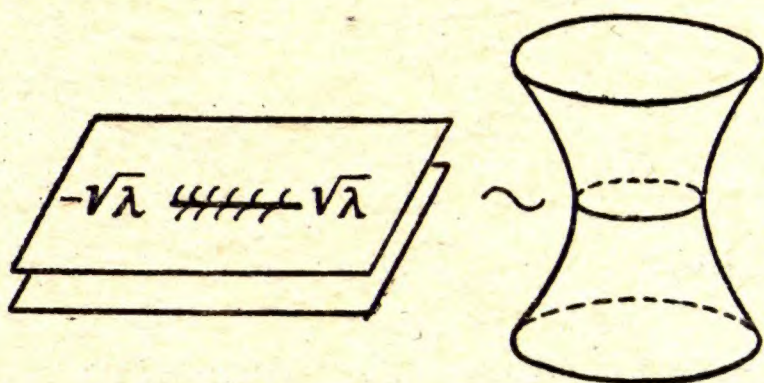


Рис. 2.

двух экземпляров плоскости комплексной переменной z , соединенных по разрезу $(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$. Каждый экземпляр разрезанной плоскости гомеоморфен половине цилиндра; линии разреза соответствует на цилиндре окружность. Итак, все (вещественно четырехмерное) пространство $\mathbb{C}^2$ разбито на особый слой V_0 и неособые слои V_λ , диффеоморфные цилиндрам, — прообразы критического значения 0 и некритических значений $\lambda \neq 0$ при отображении

$$f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0).$$

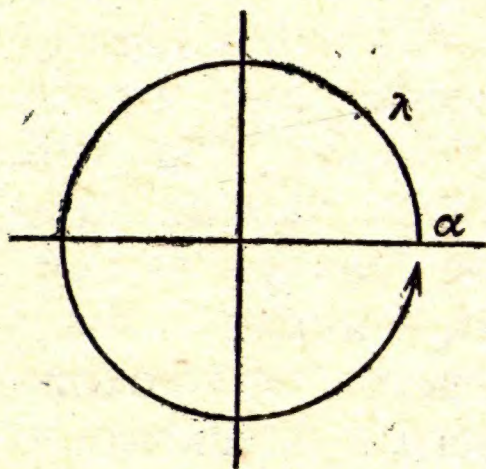


Рис. 3.

Перейдем к построению монодромии. Рассмотрим на плоскости значений функции путь, обходящий вокруг критического значения 0 в положительном направлении (против часовой стрелки): $\lambda(t) = \exp(2\pi i t) \alpha$, $0 \leq t \leq 1$, $\alpha > 0$ (рис. 3). Проследим за изменением слоя $V_{\lambda(t)}$ при изменении t от 0 до 1. Для этого рассмотрим римановы поверхности функций

$$w = \sqrt{\lambda(t) - z^2}.$$

Обе точки ветвления $z = \pm \sqrt{\lambda(t)} = \exp(\pi i t) (\pm \sqrt{\alpha})$ при возрастании параметра t движутся, обходя вокруг точки $z = 0$ в положи-

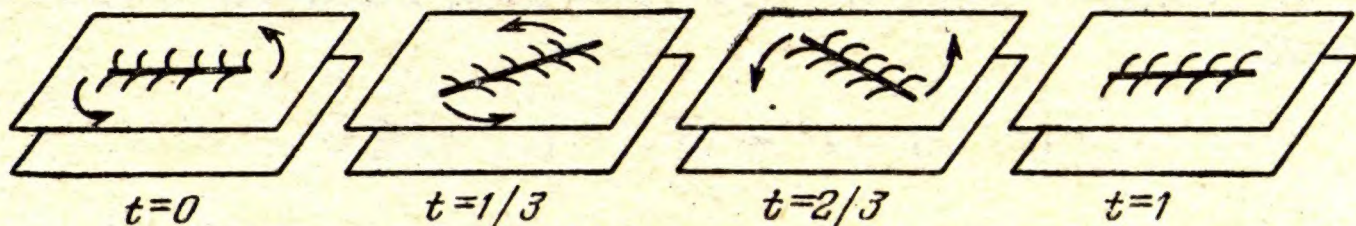


Рис. 4.

тельном направлении. Когда t изменяется от 0 до 1, каждая из этих точек совершает пол-оборота и приходит на место другой. Таким образом, обходу $\lambda(t)$ вокруг критического значения 0 соот-

ветствует серия римановых поверхностей, изображенная на рис. 4, начинающаяся и кончающаяся одной и той же поверхностью V_α .

Теперь легко построить непрерывно зависящее от t семейство диффеоморфизмов начального слоя $V_{\lambda(0)} = V_\alpha$ в слой $V_{\lambda(t)}$ над точкой $\lambda(t)$

$$\Gamma_t: V_{\lambda(0)} \rightarrow V_{\lambda(t)},$$

начинающееся с тождественного преобразования Γ_0 и заканчивающееся *монодромией* $\Gamma_1 = h$. Например, можно определить Γ_t следующим образом. Выберем гладкую «срезающую функцию» $\chi(r)$ так, чтобы $\chi(r) = 1$ при $0 \leq r \leq 2\sqrt{\alpha}$, $\chi(r) = 0$ при $r \geq 3\sqrt{\alpha}$. Положим

$$g_t(z) = \exp \{ \pi i t \cdot \chi(|z|) \} \cdot z.$$

Семейство диффеоморфизмов g_t плоскости комплексной переменной z в себя определяет искомое семейство диффеоморфизмов Γ_t . Получающийся диффеоморфизм цилиндра $h = \Gamma_1: V_\alpha \rightarrow V_\alpha$ является тождественным вне достаточно большого компакта (при $|z| > 3\sqrt{\alpha}$).

Рассмотрим теперь действие *монодромии* h на гомологии неособого слоя V_α . Группа $H_1(V_\alpha; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ одномерных гомологий цилиндра V_α порождена классом гомологий «горловой» окружности Δ (рис. 5). При $\alpha \rightarrow 0$ окружность Δ стягивается в точку 0. Поэтому она называется *исчезающим циклом Пикара — Лефшеца*.

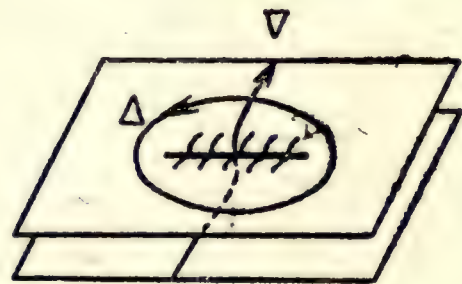
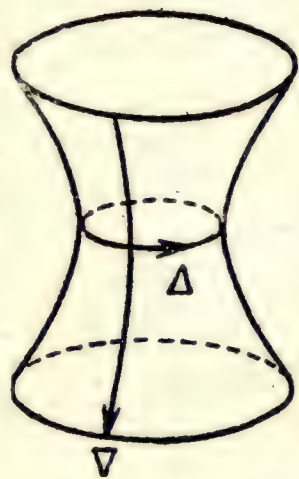


Рис. 5.

Рассмотрим еще группу $H_1^{\text{замк}}(V_\alpha; \mathbb{Z})$ одномерных гомологий слоя V_α с замкнутыми носителями. В соответствии с двойственностью Пуанкаре эта группа также изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Она порождена классом гомологий «коисчезающего цикла» ∇ — линии на цилиндре, идущей из бесконечности на бесконечность и один раз трансверсально пересекающей исчезающий цикл Δ (см. рис. 5). При этом мы будем предполагать, что цикл ∇ ориентирован таким образом, что индекс пересечения $(\nabla \circ \Delta)$ его с исчезающим циклом Δ , определенный комплексной ориентацией слоя V_α , равен $+1$.

Рис. 4 позволяет проследить за действием диффеоморфизмов Γ_t на исчезающий и коисчезающий циклы (рис. 6). Заметим, что диффеоморфизм $h = \Gamma_1$ цилиндра $V_\alpha \approx S^1 \times \mathbb{R}^1$ можно представить себе так: он неподвижен вне некоторого кольца, а окружности, составляющие кольцо, поворачивает на разные углы, меняющиеся в пределах от 0 на одном его краю до 2π на другом. Таким образом, под действием преобразования *монод-*

ромии h исчезающий цикл Δ переходит в себя, а коисчезающий перекручивается один раз вокруг цилиндра (рис. 7).

Дiffeоморфизм h неподвижен вне некоторого компакта. Вне этого компакта циклы ∇ и $h\nabla$ совпадают. Поэтому цикл $h\nabla - \nabla$

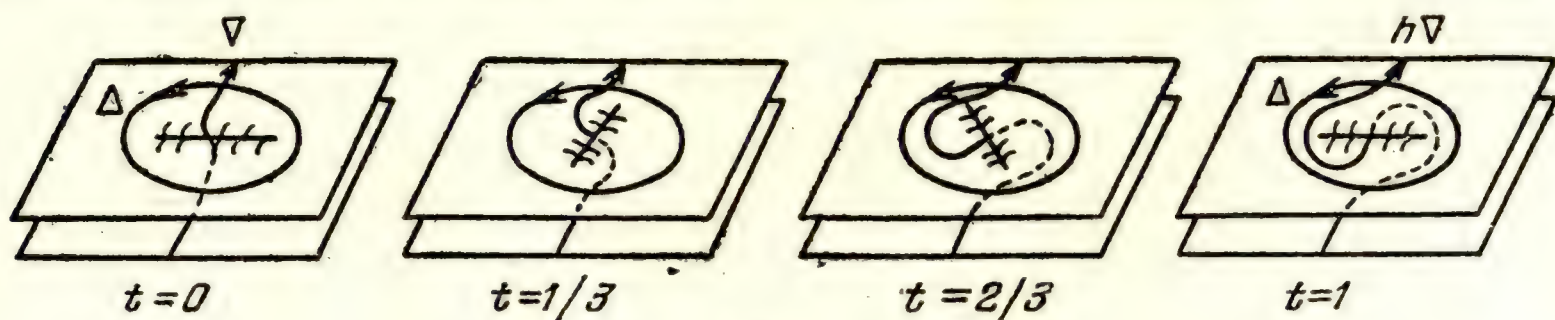


Рис. 6.

сосредоточен в компактной части цилиндра. Из рис. 7 (или из рис. 6) видно, что

$$h\nabla - \nabla = -\Delta.$$

Таким же образом для любого цикла δ с замкнутым носителем возникает цикл с компактным носителем $h\delta - \delta$. Тем самым определено отображение из гомологий слоя V_α с замкнутыми носителями в его гомологии с компактными носителями. Оно называется *вариацией* и обозначается

$$\text{Var}: H_1^{\text{замк}}(V_\alpha; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(V_\alpha; \mathbb{Z}).$$

Из рис. 7 или 6 видно, что для всякого цикла $\delta \in H_1^{\text{замк}}(V_\alpha; \mathbb{Z})$ имеет место соотношение

$$\text{Var } \delta = (\Delta \circ \delta) \Delta.$$

Здесь $(\Delta \circ \delta)$ — индекс пересечения циклов Δ и δ , определяемый комплексной ориентацией слоя V_α . Это соотношение называется *формулой Пикара — Лефшеца*.

Заметим, что, вообще говоря, диффеоморфизмы Γ_t определены только с точностью до гомотопии и априори преобразование Γ_1 не обязательно неподвижно вне компакта. Например, напращивающееся семейство диффеоморфизмов

$$\Gamma'_t: (z, w) \mapsto (z \cdot \exp(\pi i t), w \cdot \exp(\pi i t))$$

определяет отображение

$$\Gamma'_1 = h': (z, w) \mapsto (-z, -w),$$

которое не является неподвижным вне компакта и поэтому не годится для определения вариации (хотя и годится для определения действия монодромии на компактные гомологии).

Таким образом, мы рассмотрели основные понятия теории Пикара — Лефшеца: исчезающие циклы, монодромию и вариацию для простейшего примера функции $f(z, w) = z^2 + w^2$.

В общем случае произвольной функции любого числа переменных топология слоя V_λ уже не будет столь простой, как в разобранным примере. Исследование топологии слоя V_λ , монодромии и вариации в общем случае — трудная задача, решенная полностью лишь для некоторых специальных особенностей. В этой главе рассказывается о некоторых методах и результатах, полученных в этом направлении.

Основной метод, которым мы будем пользоваться, — метод деформаций (или шевелений). При малом шевелении сложная критическая точка функции n переменных распадается на простейшие. Эти простейшие критические точки устроены, как критическая точка 0 функции $f(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2$, и исследуются полностью, подобно тому, как выше был разобранный случай $n=2$. Вместо цилиндра V_λ , получающегося в случае $n=2$, в общем случае неособый слой (многообразие уровня $V_\lambda = \{(z_1, \dots, z_n) : z_1^2 + \dots + z_n^2 = \lambda\}$, $\lambda \neq 0$) диффеоморфен пространству TS^{n-1} касательного расслоения $(n-1)$ -мерной сферы (при $n=2$ получается цилиндр). Исчезающий цикл в слое V_1 — это вещественная сфера $S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n : z_1^2 + \dots + z_n^2 = 1\}$.

Если сложная критическая точка распадается при деформации на μ простейших, то и критических значений у продеформированной функции будет, вообще говоря, μ (рис. 8). В этом случае в плоскости значений продеформированной функции можно обходить все μ критических значений. Таким образом возникает не

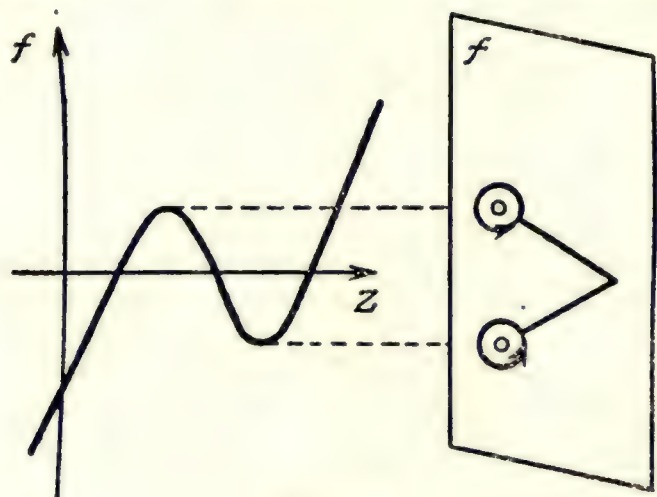


Рис. 8.

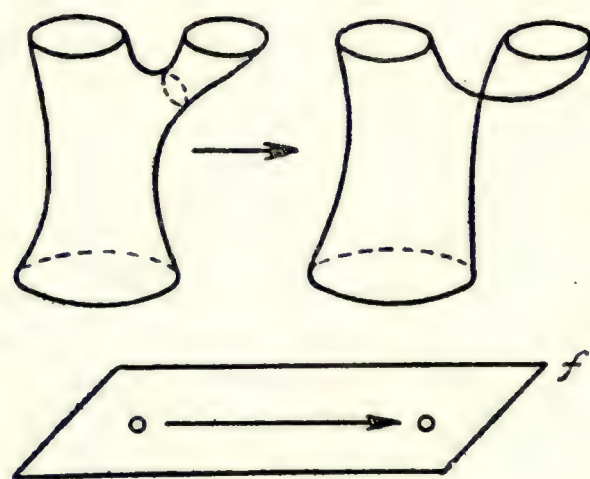


Рис. 9.

один диффеоморфизм монодромии h , а целая группа монодромии $\{h_\gamma\}$, где γ пробегает фундаментальную группу множества некритических значений.

Неособый слой V_λ пошевеленной функции устроен (внутри некоторого шара вокруг критической точки исходной функции) так же, как неособый слой исходной функции. Когда значение λ подходит к одному из критических значений пошевеленной функции, на неособом слое исчезает некоторый цикл — сфера, размерность которой равна половине (вещественной) размерности слоя V_λ (рис. 9). Подходя таким образом ко всем μ критическим значениям, мы определяем в неособом слое μ исчезающих циклов —

сфер средней размерности. Оказывается, что неособый слой гомотопически эквивалентен букету этих сфер.

В случае, когда вещественная размерность неособого слоя делится на 4 (т. е. когда число переменных n нечетно), индекс пересечения задает в группе гомологий $H_{n-1}(V_\lambda; \mathbb{Z})$ неособого многообразия уровня симметричную билинейную форму. Индекс самопересечения каждого из исчезающих циклов равен (в зависимости от числа переменных n) $+2$ или -2 . Действие обхода вокруг соответствующего исчезающему циклу критического значения сводится к отражению относительно зеркала, ортогонального этому циклу в смысле скалярного произведения, заданного индексом пересечения.

Например, для функции трех переменных

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^{k+1} + z_2^2 + z_3^2$$

удобным шевелением является

$$\tilde{f}(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2, z_3) - \varepsilon z_1.$$

Эта функция имеет $\mu = k$ критических точек $(\sqrt[k]{\varepsilon/(k+1)} \xi_m, 0, 0)$, где ξ_m ($m = 1, \dots, k$) — корни k -й степени из единицы. Соответствующие исчезающие циклы $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ могут быть выбраны так, что они будут иметь следующие индексы пересечений: $(\Delta_i \circ \Delta_i) = -2$, $(\Delta_1 \circ \Delta_2) = (\Delta_2 \circ \Delta_3) = \dots = (\Delta_{k-1} \circ \Delta_k) = 1$ (остальные пересечения будут равны нулю). Группа монодромии порождена отражениями в ортогональных дополнениях к циклам Δ_m и совпадает с группой Вейля A_k (см. [16]), т. е. с группой $S(k+1)$ перестановок $(k+1)$ элементов.

В этой главе мы обычно (кроме § 5) будем иметь дело с изолированными особенностями функций. Поэтому под термином «особенность» будет пониматься росток голоморфной функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, имеющий в нуле изолированную критическую точку (т. е. точку, в которой все частные производные функции f равны нулю).

Пусть $G: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ — росток в нуле аналитического отображения, U — окрестность нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$, в которой определен представитель ростка G , G_λ — аналитическое по λ из окрестности нуля в $\mathbb{C}$ семейство отображений $U \rightarrow \mathbb{C}^p$ такое, что $G_0 = G$. Малым шевелением $\tilde{G}$ отображения G мы будем называть отображение G_λ для достаточно малого λ , не указывая каждый раз явно это семейство и ограничение на величину параметра λ .

Всюду абсолютные группы гомологий считаются приведенными по модулю точки, а относительные группы гомологий пары «многообразие — край» — по модулю фундаментального цикла (волна над буквой H , которую обычно используют для обозначения приведенных групп гомологий, при этом будет опускаться). Все го-

мологии считаются с коэффициентами в группе Z целых чисел, если специально не оговорено противное.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное векторное пространство с координатами $x_j = u_j + iv_j$ ($j = 1, \dots, n$; u_j и v_j вещественны). Пространство $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, рассматриваемое как $2n$ -мерное вещественное векторное пространство, имеет выделенную ориентацию, которую мы будем называть комплексной. Эта ориентация определяется тем, что положительно ориентированной системой координат в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ объявляется $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$. Комплексные многообразия будут рассматриваться с их комплексной ориентацией, если специально не оговорено противное. При таком выборе ориентации индекс пересечения комплексных подмногообразий всегда неотрицателен.

§ 1. Элементы теории Пикара — Лефшеца

В этом параграфе определяются такие понятия теории Пикара — Лефшеца, как исчезающие циклы, операторы монодромии и вариации, операторы Пикара — Лефшеца, ... Как уже говорилось, они используются при исследовании топологии критических точек голоморфных функций.

1.1. Операторы монодромии и вариации. Пусть $f: M^n \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция на n -мерном комплексном многообразии M^n , имеющем гладкий край ∂M^n (в вещественном смысле), U — некоторая стягиваемая компактная область в плоскости $\mathbb{C}$ с гладкой границей ∂U . Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1° для некоторой окрестности U' области U ограничение f на прообраз U' является собственным отображением $f^{-1}(U') \rightarrow U'$, т. е. отображением, при котором прообраз любого компактного множества компактен;

2° ограничение f на $\partial M^n \cap f^{-1}(U')$ является регулярным отображением на U' , т. е. отображением, дифференциал которого эпиморфен;

3° функция f имеет на прообразе $f^{-1}(U')$ области U' конечное число критических точек p_i ($i = 1, \dots, \mu$) с критическими значениями $z_i = f(p_i)$, лежащими внутри области U , т. е. в $U - \partial U$.

Из условия 2° следует, что ограничение функции f на $\partial M^n \cap f^{-1}(U)$ определяет локально тривиальное, а следовательно (поскольку область U предполагается стягиваемой), и тривиальное расслоение $\partial M^n \cap f^{-1}(U) \rightarrow U$. Структура прямого произведения в пространстве этого расслоения единственна с точностью до гомотопии. Кроме того, ограничение функции f на прообраз $f^{-1}(U - \{z_i\})$ множества некритических значений является локально тривиальным расслоением.

Будем обозначать через F_z ($z \in U$) множество уровня функции f ($F_z = f^{-1}(z)$). Если $z \in U$ — некритическое значение функции f ,

то соответствующее множество уровня F_z является компактным $(n-1)$ -мерным комплексным многообразием с гладким краем $\partial F_z = F_z \cap \partial M^n$. Зафиксируем некритическое значение z_0 , принадлежащее границе ∂U области U . Пусть γ — некоторая петля в дополнении к множеству критических значений $U - \{z_i \mid i = 1, \dots, \mu\}$ с началом и концом в точке z_0 ($\gamma: [0, 1] \rightarrow U - \{z_i\}$, $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$). (Не ограничивая общности, можно считать, что все встречающиеся петли и пути являются кусочно гладкими.) Обход вдоль петли γ порождает непрерывное семейство отображений $\Gamma_t: F_{z_0} \rightarrow M^n$ (понятие гомотопии), для которого Γ_0 — тождественное отображение многообразия уровня F_{z_0} в себя, $f(\Gamma_t(x)) = \gamma(t)$, т. е. отображение Γ_t переводит многообразие уровня F_{z_0} в многообразие уровня $F_{\gamma(t)}$. Гомотопия Γ_t может быть (и будет) выбрана согласованной со структурой прямого произведения на $\partial M^n \cap \cap f^{-1}(U)^*$). В этом случае отображение $h_\gamma = \Gamma_1: F_{z_0} \rightarrow F_{z_0}$ тождественно на краю ∂F_{z_0} многообразия уровня F_{z_0} . Оно определено однозначно с точностью до (неподвижной по краю ∂F_{z_0}) гомотопии классом петли γ в фундаментальной группе $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений.

Определение. Преобразование h_γ неособого множества уровня F_{z_0} в себя называется *монодромией* петли γ . Действие $h_{\gamma*}$ преобразования h_γ в гомологиях неособого множества уровня $H_*(F_{z_0})$ называется *оператором монодромии* петли γ .

Оператор монодромии однозначно определен классом петли γ в фундаментальной группе дополнения к множеству критических значений.

Мы будем рассматривать также автоморфизм $h_{\gamma*}^{(r)}$ индуцированный преобразованием h_γ в группе относительных гомологий $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ неособого множества уровня по модулю края. Во введении к этой главе мы вместо группы относительных гомологий $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ пользовались группой $H_1^{\text{замк}}(V_\alpha)$ гомологий с замкнутыми носителями (в соответствии с изоморфизмом $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \cong H_*^{\text{замк}}(F_{z_0} - \partial F_{z_0})$).

Пусть δ — относительный цикл в паре $(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Поскольку преобразование h_γ тождественно на краю ∂F_{z_0} многообразия уровня F_{z_0} , граница цикла $h_\gamma \delta$ совпадает с границей цикла δ . Поэтому разность $h_\gamma \delta - \delta$ является абсолютным циклом в многообразии F_{z_0} . Нетрудно видеть, что соответствие $\delta \mapsto h_\gamma \delta - \delta$ задает корректно определенный гомоморфизм $\text{var}_\gamma: H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \rightarrow H_*(F_{z_0})$.

Определение. Гомоморфизм $\text{var}_\gamma: H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \rightarrow H_*(F_{z_0})$ называется *оператором вариации* петли γ .

Нетрудно видеть, что автоморфизмы $h_{\gamma*}$ и $h_{\gamma*}^{(r)}$ связаны с оператором вариации соотношениями $h_{\gamma*} = \text{id} + \text{var}_\gamma \cdot i_*$, $h_{\gamma*}^{(r)} = \text{id} +$

*) На самом деле в качестве $\{\Gamma_t\}$ может быть выбрано семейство диффеоморфизмов $F_{z_0} \rightarrow F_{\gamma(t)}$, но это нам в дальнейшем не понадобится.

$+ i_* \cdot \text{var}_\gamma$, где $i_*: H_*(F_{z_0}) \rightarrow H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ — естественный гомоморфизм, индуцированный включением $F_{z_0} \hookrightarrow (F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Если класс петли γ в фундаментальной группе $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений равен произведению $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ классов γ_1 и γ_2 , то $\text{var}_\gamma = \text{var}_{\gamma_1} + \text{var}_{\gamma_2} + \text{var}_{\gamma_2} \cdot i_* \cdot \text{var}_{\gamma_1}$, $h_{\gamma*} = h_{\gamma_2*} \cdot h_{\gamma_1*}$, $h_{\gamma*}^{(r)} = h_{\gamma_2*}^{(r)} \cdot h_{\gamma_1*}^{(r)}$. Поэтому соответствие $\gamma \mapsto h_{\gamma*}$ является (анти)гомоморфизмом фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений в группу $\text{Aut } H_*(F_{z_0})$ автоморфизмов группы $H_*(F_{z_0})$ гомологий неособого множества уровня.

Будем обозначать через $(a \circ b)$ индекс пересечения циклов (или классов гомологий) a и b . Это обозначение будет использоваться как в случае, когда оба цикла a и b абсолютные, так и в случае, когда один из них относительный. Напомним, что многообразие уровня F_{z_0} является комплексным многообразием и поэтому обладает выделенной ориентацией, которая и определяет индекс пересечения циклов на нем.

Лемма 1. Пусть $a, b \in H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ — относительные классы гомологий, $\dim a + \dim b = 2n - 2$, $\gamma \in \pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$. Тогда $(\text{var}_\gamma a \circ \text{var}_\gamma b) + (a \circ \text{var}_\gamma b) + (\text{var}_\gamma a \circ b) = 0$.

Доказательство. Выберем относительные циклы, являющиеся представителями классов гомологий a и b , так, чтобы их границы (лежащие на краю ∂F_{z_0} многообразия уровня F_{z_0}) не пересекались. Это можно сделать по соображениям размерности ($\dim \partial a + \dim \partial b = 2n - 4 < 2n - 3 = \dim \partial F_{z_0}$). Выбранные циклы мы также будем обозначать через a и b . Для таких циклов имеет смысл их индекс пересечения, не являющийся, конечно, инвариантом их классов в группе гомологий $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Имеем:

$$\text{var}_\gamma a = h_\gamma a - a, \quad \text{var}_\gamma b = h_\gamma b - b,$$

$$\begin{aligned} (\text{var}_\gamma a \circ \text{var}_\gamma b) + (\text{var}_\gamma a \circ b) + (a \circ \text{var}_\gamma b) = \\ = (h_\gamma a \circ h_\gamma b) - (a \circ h_\gamma b) - (h_\gamma a \circ b) + (a \circ b) + \\ + (h_\gamma a \circ b) - (a \circ b) + (a \circ h_\gamma b) - (a \circ b) = 0, \end{aligned}$$

так как $(h_\gamma a \circ h_\gamma b) = (a \circ b)$.

Следствие. Для $a, b \in H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$

$$(h_{\gamma*}^{(r)} a \circ \text{var}_\gamma b) + (\text{var}_\gamma a \circ b) = 0.$$

Доказательство. $(h_{\gamma*}^{(r)} a \circ \text{var}_\gamma b) + (\text{var}_\gamma a \circ b) = (i_* \cdot \text{var}_\gamma a \circ \text{var}_\gamma b) + (a \circ \text{var}_\gamma b) + (\text{var}_\gamma a \circ b) = 0$, так как $h_{\gamma*}^{(r)} = \text{id} + i_* \cdot \text{var}_\gamma$, $(i_* \cdot \text{var}_\gamma a \circ \text{var}_\gamma b) = (\text{var}_\gamma a \circ \text{var}_\gamma b)$.

1.2. Исчезающие циклы и группа монодромии. Предположим теперь, что все критические точки p_i функции f невырождены (т. е. $\det(\partial^2 f / \partial x_j \partial x_k) \neq 0$), а все критические значения $z_i = f(p_i)$ различны ($i = 1, \dots, \mu$). Напомним, что в этом случае функция f называется морсовской.

Определение. Группой монодромии (морсовской) функции f называется образ гомоморфизма фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений в группу $\text{Aut } H_*(F_{z_0})$ автоморфизмов группы $H_*(F_{z_0})$ гомологий неособого множества уровня F_{z_0} , сопоставляющего петле γ оператор монодромии $h_{\gamma*}: H_*(F_{z_0}) \rightarrow H_*(F_{z_0})$.

Пусть в области U задан путь $u: [0, 1] \rightarrow U$, соединяющий некоторое критическое значение z_i с некритическим значением z_0 ($u(0) = z_i$, $u(1) = z_0$) и не проходящий через критические значения функции f при $t \neq 0$. По лемме Морса в окрестности невырожденной критической точки p_i на многообразии M^n существует локальная система координат $x_1, \dots, x_n$, в которой функция f записывается в виде $f(x_1, \dots, x_n) = z_i + \sum_{j=1}^n x_j^2$. Для значе-

ния параметра t , близкого к нулю, зафиксируем в многообразии уровня $F_{u(t)}$ сферу $S(t) = \sqrt{u(t) - z_i} \cdot S^{n-1}$, где $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n): \sum_j x_j^2 = 1, \text{Im } x_j = 0\}$ — стандартная единичная $(n-1)$ -мерная сфера.

Поднятие гомотопии t от нуля до единицы определяет семейство $(n-1)$ -мерных сфер $S(t) \subset F_{u(t)}$ в многообразиях уровня $F_{u(t)}$ для всех $t \in (0, 1]$. Заметим, что при $t = 0$ сфера $S(t)$ вырождается в критическую точку p_i .

Определение. Класс гомологий $\Delta \in H_{n-1}(F_{z_0})$, представленный $(n-1)$ -мерной сферой $S(1)$ в выделенном неособом многообразии уровня F_{z_0} , называется *исчезающим* (вдоль пути u) *циклом Пикара—Лефшеца*.

Легко видеть, что гомотопический класс пути u в классе путей в области U , соединяющих критическое значение z_i с некритическим значением z_0 и не проходящих через критические значения функции f при $t \neq 0$, определяет класс гомологий исчезающего цикла Δ с точностью до ориентации.

Определение. Набор циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ из группы $H_{n-1}(F_{z_0})$ $(n-1)$ -мерных гомологий неособого множества уровня F_{z_0} называется *отмеченным*, если:

1° цикл Δ_i ($i = 1, \dots, \mu$) является исчезающим вдоль несамопересекающегося пути u_i , соединяющего критическое значение z_i с некритическим значением z_0 ;

2° пути u_i и u_j при $i \neq j$ имеют единственную общую точку $u_i(1) = u_j(1) = z_0$;

3° пути $u_1, \dots, u_\mu$ занумерованы в том порядке, в котором они входят в точку z_0 , считая по часовой стрелке, начиная от границы ∂U области U (см. рис. 10).

Замечание. Выбор некритического значения z_0 на границе ∂U области U диктовался необходимостью перенумерации элементов отмеченного набора исчезающих циклов в соответствии с условием 3°.

Примеры. 1) Рассмотрим морсовскую функцию $f(x) = x^3 - 3\lambda x$, где λ — малое положительное число. Эта функция является шевелением функции $f_0(x) = x^3$ (имеющей особенность типа A_2 в смысле ОДО-I), но сейчас это нам не понадобится. Функция f имеет две критические точки ($x = \sqrt{\lambda}$ и $x = -\sqrt{\lambda}$) с критическими значениями $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ и $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ соответственно. В качестве некритического значения функции f возьмем $z_0 = 0$. Соединим

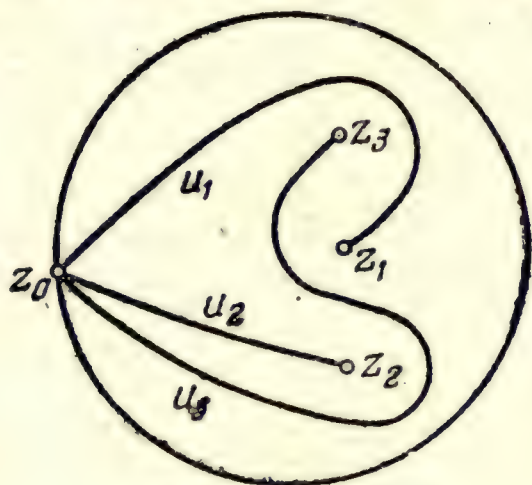


Рис. 10.

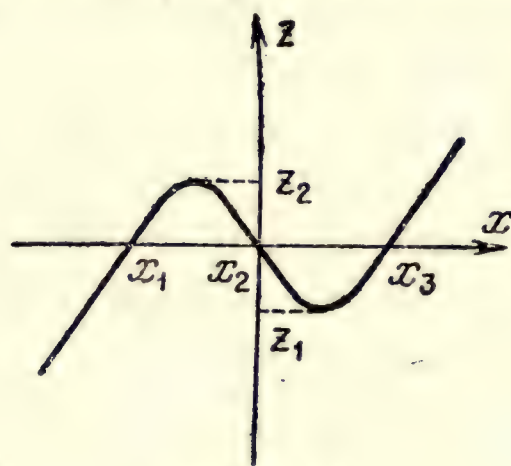


Рис. 11.

критические значения z_i ($i = 1, 2$) с некритическим значением z_0 отрезками u_1 и u_2 . Многообразие уровня $\{f=0\}$ состоит из трех точек $x_1 = -\sqrt{3\lambda}$, $x_2 = 0$ и $x_3 = \sqrt{3\lambda}$ (см. рис. 11). Легко видеть, что исчезающими (вдоль описанных путей u_1 и u_2 , соединяющих критические значения z_1 и z_2 с некритическим значением 0) циклами являются разности $\Delta_1 = \{x_3\} - \{x_2\}$ и $\Delta_2 = \{x_2\} - \{x_1\}$ нульмерных классов гомологий, представленных точками x_1 , x_2 и x_3 . Заметим, что ориентации этих циклов выбираются нами произвольно: любой из них может быть умножен на (-1) .

Для большей наглядности мы выбрали некритическое значение $z_0 = 0$. Это предполагает, конечно, специальный выбор области U . В данном месте это не очень существенно, но дальше при определении отмеченных базисов исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня вырожденной особенности в качестве области U будет рассматриваться круг достаточно большого (по сравнению с критическими значениями пошевеленной функции) радиуса. Выбор некритического значения на границе достаточно большого круга диктуется тем, что в противном случае, во-первых, отождествление групп гомологий неособых многообразий уровня особенности и ее шевеления является неоднозначным и, во-вторых, неоднозначным становится порядок, в котором исчезающие циклы должны входить в отмеченный базис. Для «исправления» рассмотренного выше примера можно выбрать некритическое значение z_0^* , достаточно большое по абсолютной величине ($|z_0^*| \gg 2\lambda\sqrt{\lambda}$), соединить его с некритическим значением $z_0 = 0$ путем, не проходящим через критические значения функции f , и проследить за изменением неособого многообразия уровня $f=z$ при движении z вдоль этого пути от $z_0 = 0$ до z_0^* . Аналогичное построение в более

общем случае мы сделаем позже (п. 2.9). Здесь мы для простоты рассуждений несколько видоизменим пример.

1*) Рассмотрим морсовскую функцию $f(x) = x^3 + 3\lambda x$, где λ — положительное число. Критическими точками функции f являются $x = -\sqrt{\lambda}i$ и $x = +\sqrt{\lambda}i$, критическими значениями — $z_1 = -2\lambda \times \sqrt{\lambda}i$ и $z_2 = 2\lambda \sqrt{\lambda}i$. В качестве области U возьмем круг достаточно большого радиуса r с центром в нуле ($r \gg 2\lambda \sqrt{\lambda}$). Рассмотрим два некритических значения функции f : $z_0 = 0$ и $z_0^* = r$. Критические значения $z_{1,2}$ соединим с $z_0 = 0$ отрезками, идущими по мнимой оси, $z_0 = 0$ соединим с $z_0^* = r$ отрезком положительной вещественной полуоси. Тем самым мы получили пути u_1 и u_2 , соединяющие критические значения $z_{1,2}$ с некритическим значением z_0^* . Как и раньше, нулевое многообразие уровня функции f состоит из трех точек $x_1 = -\sqrt{3\lambda}i$, $x_2 = 0$ и $x_3 = +\sqrt{3\lambda}i$. Многообразие уровня $\{f = z_0^*\}$ близко к многообразию уровня $\{f_0 = z_0^*\}$ функции $f_0(x) = x^3$ (поскольку $|z_0^*| = r \gg 2\lambda \sqrt{\lambda}$). Поэтому оно состоит из трех точек $x_1^* \approx \exp(-2\pi i/3) \sqrt[3]{z_0^*}$, $x_2^* \approx \sqrt[3]{z_0^*}$, $x_3^* \approx \exp(2\pi i/3) \sqrt[3]{z_0^*}$. Нетрудно видеть, что вдоль отрезка, соединяющего критическое значение $z_1 = -2\lambda \sqrt{\lambda}i$ (соответственно $z_2 = 2\lambda \sqrt{\lambda}i$) с некритическим значением $z_0 = 0$, исчезает цикл $\{x_2\} - \{x_1\}$ (соответственно $\{x_3\} - \{x_2\}$). Далее, очевидно, что при движении некритического значения z по отрезку положительной полуоси от $z_0 = 0$ к $z_0^* = r$ точки многообразия $\{f = z\}$ перемещаются таким образом, что точка x_2 остается на вещественной оси, точка x_1 — в нижней, а точка x_3 — в верхней полуплоскостях. Поэтому при изменении z от z_0 до z_0^* точки x_1 , x_2 и x_3 переходят в точки x_1^* , x_2^* и x_3^* соответственно. Следовательно, вдоль описанных путей u_1 и u_2 , соединяющих критические значения z_1 и z_2 функции f с некритическим значением z_0^* , исчезают циклы $\Delta_1 = \{x_2^*\} - \{x_1^*\}$ и $\Delta_2 = \{x_3^*\} - \{x_2^*\}$ соответственно. Легко видеть, что исчезающие циклы Δ_1 и Δ_2 образуют отмеченный набор.

2) В качестве другого примера рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ (λ — малое положительное число). Эта функция является шевелением функции $f_0(x, y) = x^3 + y^2$, также имеющей особенность типа A_2 в смысле ОДО-I. Функция f имеет те же критические значения $z_1 = -2\lambda \sqrt{\lambda}$ и $z_2 = 2\lambda \sqrt{\lambda}$, что и функция из первого примера. Эти значения принимаются в точках $(\sqrt{\lambda}, 0)$ и $(-\sqrt{\lambda}, 0)$ соответственно. Соединим критические значения z_1 и z_2 с некритическим значением $z_0 = 0$ отрезками u_1 и u_2 вещественной оси. Нулевое многообразие уровня функции f (комплексная кривая $\{f = 0\}$) является графиком двузначной функции $y = \sqrt{-x^3 + 3\lambda x}$ и поэтому является двулистным разветвленным накрытием плоскости комплексной переменной x , ветвящимся в точках $x_1 = -\sqrt{3\lambda}$, $x_2 = 0$ и $x_3 = \sqrt{3\lambda}$. Оно может быть полу-

чено из двух экземпляров плоскости комплексной переменной x с разрезами от точки x_1 до точки x_2 и от точки x_3 до бесконечности (см. рис. 12), склеенных крест-накрест вдоль этих разрезов. При изменении z вдоль вещественной оси от $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ до $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ многообразие $\{f=z\}$ деформируется. Изменение точек $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(z)$, $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(z)$ и $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_3(z)$ ветвления этого многообразия как двулистного накрытия над плоскостью комплексной переменной x показано на рис. 13. Из него видно, что исчезающими циклами, соответствующими критическим значениям $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ и $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ и описанным путям u_1 и u_2 , соединяющим их с некритическим значением 0, являются одномерные циклы Δ_1 и Δ_2 ,

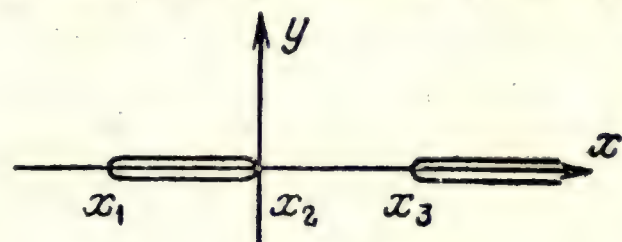


Рис. 12.

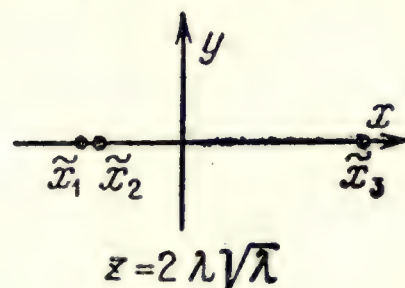
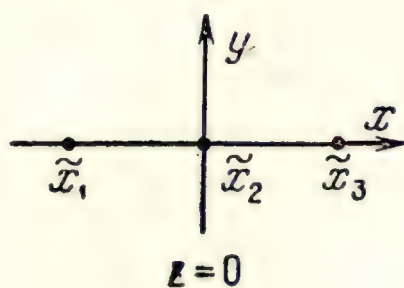
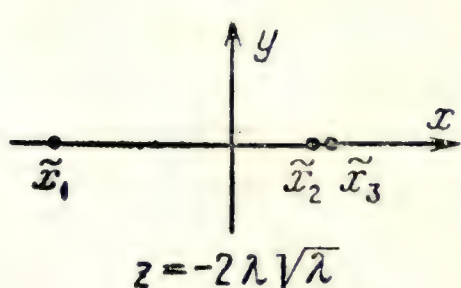


Рис. 13.

изображенные на рис. 14 (пунктиром показана часть цикла, лежащая на втором листе поверхности; ориентации исчезающих циклов опять могут быть выбраны произвольно).

Пусть опять u — путь, соединяющий некоторое критическое значение z_i с некритическим значением z_0 .

Определение. *Простой петлей*, соответствующей пути u , называется элемент фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений, представленный петлей, идущей по пути u от точки z_0 к точке z_i , обходящей точку z_i в положительном направлении (против часовой стрелки) и возвращающейся по пути u в точку z_0 .

Область U с выколотыми из нее μ критическими значениями $\{z_i | i = 1, \dots, \mu\}$ функции f гомотопически эквивалентна букету μ окружностей. Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений функции f является свободной группой с μ образующими. Если $\{u_i | i = 1, \dots, \mu\}$ — система путей, определяющая отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$, то группа $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ порождена простыми петлями $\tau_1, \dots, \tau_\mu$, соответствующими путям $u_1, \dots, u_\mu$.

Определение. Набор исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$, определяемый набором путей $\{u_i\}$, называется *слабо отмеченным*,

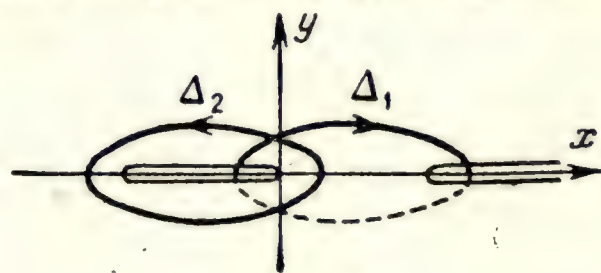


Рис. 14.

если фундаментальная группа $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений является свободной группой с образующими $\tau_1, \dots, \tau_\mu$, соответствующими путям $u_1, \dots, u_\mu$.

Заметим, что перестановка элементов сохраняет слабую отмеченность набора, но не сохраняет его отмеченность.

Если набор путей $\{u_i | i=1, \dots, \mu\}$ определяет слабо отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$ в группе $(n-1)$ -мерных гомологий неособого многообразия уровня, то группа монодромии функции f порождена операторами монодромии h_{τ_i} простых петель τ_i ($i=1, \dots, \mu$), соответствующих путям u_i . Поэтому группа монодромии (морсовской) функции f всегда является группой, порожденной μ образующими.

Определение. Оператор монодромии $h_i = h_{\tau_i} : H_*(F_{z_0}) \rightarrow H_*(F_{z_0})$ простой петли τ_i называется *оператором Пикара — Лефшеца*, соответствующим пути u_i (или исчезающему циклу Δ_i).

Примеры. 1) Рассмотрим морсовскую функцию $f(x) = x^3 + 3\lambda x$ из примера 1*) к определению отмеченных наборов исчезающих циклов. Пусть τ_i — простая петля (с началом и концом в точке z_0^*), соответствующая пути u_i . При движении некритического значения z вдоль петли τ_1 многообразие уровня $\{f=z\}$ меняется следующим образом: точки x_1^* и x_2^* сближаются, делают по пол оборота вокруг общего центра, меняясь местами, и расходятся на прежние места; точка x_3^* возвращается на свое место. Поэтому монодромия h_{τ_1} петли τ_1 меняет местами точки x_1^* и x_2^* и сохраняет точку x_3^* . Отсюда следует, что $h_1 \Delta_1 = h_{\tau_1} \Delta_1 = h_{\tau_1} (\{x_2^*\} - \{x_1^*\}) = \{x_1^*\} - \{x_2^*\} = -\Delta_1$, $h_1 \Delta_2 = h_{\tau_1} \Delta_2 = h_{\tau_1} (\{x_3^*\} - \{x_2^*\}) = \{x_3^*\} - \{x_1^*\} = \Delta_2 + \Delta_1$. Точно так же $h_2 \Delta_2 = -\Delta_2$, $h_2 \Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_1$.

Группа $H_{n-1}(F_z, \partial F_z)$ гомологий неособого многообразия уровня по модулю края является группой, двойственной к группе $H_{n-1}(F_z)$ (приведенной по модулю точки при $n=1$). В данном случае ее роль исполняет группа обычных нульмерных гомологий многообразия уровня $\{f=z_0^*\}$ (состоящего из трех точек x_1^* , x_2^* и x_3^*), профакторизованная по подгруппе, порожденной «максимальным циклом» $\{x_1^*\} + \{x_2^*\} + \{x_3^*\}$. Она порождена двумя циклами ∇_1 и ∇_2 такими, что $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$. В качестве таких циклов можно взять $\nabla_1 = -\{x_1^*\}$, $\nabla_2 = \{x_3^*\}$. Из описания преобразования монодромии h_{τ_1} следует, что $\text{var}_{\tau_1} \nabla_1 = -\{x_2^*\} + \{x_1^*\} = -\Delta_1$, $\text{var}_{\tau_1} \nabla_2 = 0$. Для петли τ_2 имеем $\text{var}_{\tau_2} \nabla_1 = 0$, $\text{var}_{\tau_2} \nabla_2 = -\Delta_2$.

Рассмотрим теперь петлю τ , определяемую формулой $\tau(t) = z_0^* \exp(2\pi i t)$. Петля τ обходит критические значения функции f один раз в положительном направлении (против часовой стрелки) по кругу большого радиуса. Из того, что при больших $|z|$ множество уровня $\{f=z\}$ близко к множеству уровня $\{x^3=z\}$, следует, что преобразование монодромии h_τ петли τ переводит точки x_1^* , x_2^* и x_3^* друг в друга циклически ($x_1^* \rightarrow x_2^* \rightarrow x_3^* \rightarrow x_1^*$). Отсюда вытекает, что $h_{\tau} \Delta_1 = h_{\tau} (\{x_2^*\} - \{x_1^*\}) = \{x_3^*\} - \{x_2^*\} = \Delta_2$, $h_{\tau} \Delta_2 =$

$= h_{\tau_*}(\{x_3^*\} - \{x_2^*\}) = \{x_1^*\} - \{x_3^*\} = -\Delta_1 - \Delta_2$. Эти соотношения можно вывести также из того, что петля τ гомотопна произведению $\tau_2\tau_1$ простых петель τ_2 и τ_1 и, следовательно, $h_{\tau_*} = h_1 \cdot h_2$. Для оператора вариации имеем: $\text{var}_{\tau} \nabla_1 = -\{x_2^*\} + \{x_1^*\} = -\Delta_1$, $\text{var}_{\tau} \nabla_2 = \{x_1^*\} - \{x_3^*\} = -\Delta_1 - \Delta_2$.

Группа монодромии морсовской функции f порождена операторами $h_1 = h_{\tau_1}$ и $h_2 = h_{\tau_2}$ монодромии петель τ_1 и τ_2 (операторами Пикара—Лефшеца). Все элементы этой группы сохраняют форму пересечений в группе $H_0(F_{z_0}^*)$ гомологий неособого многообразия уровня (приведенной по модулю точки), порожденной исчезающими циклами Δ_1 и Δ_2 . Чтобы описать группу монодромии нагляднее, рассмотрим на евклидовой плоскости шестерку векторов длины $\sqrt{2}$, составляющих друг с другом углы, равные $(\pi/3)$ (рис. 15). Нетрудно видеть, что группа $H_0(F_{z_0}^*)$ (как модуль над кольцом целых чисел с целочисленной билинейной формой на нем) изоморфна целочисленной решетке на плоскости, порожденной векторами Δ_1 и Δ_2 (см. рис. 15; шесть векторов, изображенных на рисунке, — это элементы решетки, квадраты длин которых равны 2). При этом оператор h_1 реализуется отражением относительно прямой L_1 , ортогональной вектору Δ_1 , а оператор h_2 — относительно прямой L_2 , ортогональной вектору Δ_2 . Отсюда следует, что группа преобразований решетки, порожденная операторами h_1 и h_2 (группа монодромии морсовской функции f), изоморфна группе $S(3)$ перестановок трех элементов (а именно — трех векторов $(2\Delta_1 + \Delta_2)$, $(-\Delta_1 + \Delta_2)$ и $(-\Delta_1 - 2\Delta_2)$).

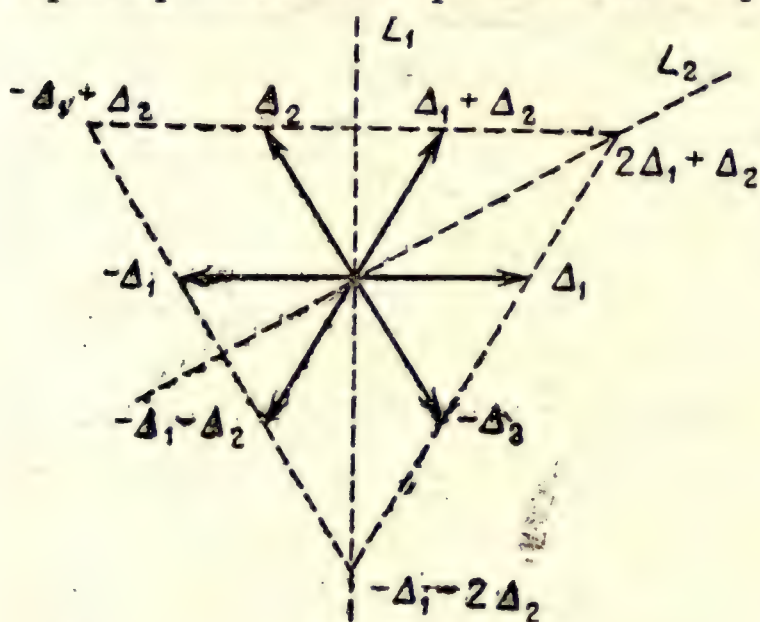


Рис. 15.

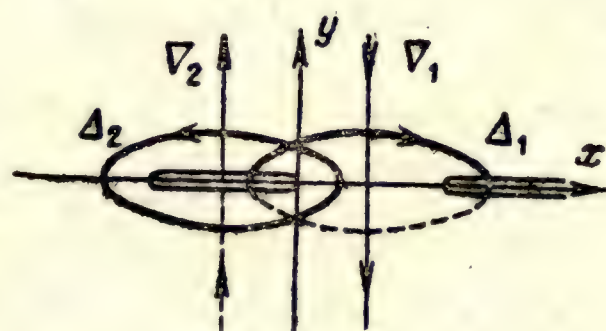


Рис. 16.

2) В примере 2) описание многообразия уровня $\{f=z\}$ как двулистного разветвленного накрытия над плоскостью комплексной переменной x , ветвящегося в трех точках, позволяет проследить за действиями преобразований монодромии h_{τ_1} и h_{τ_2} и получить соотношения $h_1\Delta_1 = \Delta_1$, $h_1\Delta_2 = \Delta_2 + \Delta_1$, $h_2\Delta_1 = \Delta_1 - \Delta_2$, $h_2\Delta_2 = \Delta_2$, $\text{var}_{\tau_1} \nabla_1 = -\Delta_1$, $\text{var}_{\tau_1} \nabla_2 = 0$, $\text{var}_{\tau_2} \nabla_1 = 0$, $\text{var}_{\tau_2} \nabla_2 = -\Delta_2$. Мы не будем проводить здесь соответствующие геометрические рассуждения, оставив их читателю *). Укажем только относительные

*) Они аналогичны тем, которые проводились во введении для более простого случая.

циклы, которые могут быть взяты в качестве ∇_1 и ∇_2 (образующих группы $H_1(F_{z_0^*}, \partial F_{z_0^*})$ относительных гомологий неособого многообразия уровня функции f по модулю края таких, что $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$): см. рис. 16.

Группа монодромии морсовской функции $f(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ изоморфна подгруппе группы невырожденных матриц размера (2×2) , порожденной матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующими операторам Пикара—Лефшеца h_1 и h_2 . Эта группа совпадает с группой всех целочисленных матриц с определителем $(+1)$.

1.3. Теорема Пикара—Лефшеца. Пусть τ —простая петля, соответствующая пути u , соединяющему критическое значение z_i с некритическим значением z_0 , $\Delta \in H_{n-1}(F_{z_0})$ —цикл, исчезающий вдоль пути u . Мы хотим определить действие операторов var_τ и $h_{\tau*}$ в соответствующих группах гомологий.

Не ограничивая общности, можно считать, что критическое значение $z_i = u(0)$ равно нулю, в окрестности критической точки p_i функция f имеет вид $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_j x_j^2$ (при достаточно малом $\|(x_1, \dots, x_n)\|$, например, при $\sum_j |x_j|^2 \leq 4\varepsilon^2$; в точке p_i все локальные координаты x_j равны нулю), некритическое значение z_0 достаточно близко к критическому значению 0 (например, $|z_0| = \varepsilon^2$), а $u(t) = tz_0$. Кроме того, мы будем предполагать, что все ненулевые критические значения функции f по модулю больше $4\varepsilon^2$. Линейная замена координат позволяет считать, что $\varepsilon = 1$, $z_0 = 1$. Петля τ может быть заменена гомотопной ей петлей τ' : $\tau'(t) = \exp(2\pi it)$, $t \in [0, 1]$.

Пусть $r = r(x_1, \dots, x_n) = \|x\| = \left(\sum_j |x_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_j x_j \bar{x}_j\right)^{1/2}$ —норма вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$. Обозначим через $\bar{F}_z$ пересечение множества уровня F_z с (замкнутым) шаром $\bar{B}_2 = \{(x_1, \dots, x_n): r \leq 2\}$ радиуса 2 в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Лемма 2. При $|z| < 4$ множество уровня F_z трансверсально к $(2n-1)$ -мерной сфере $S_2 = \partial \bar{B}_2$ (множество уровня F_z является многообразием при $z \neq 0$, нулевое множество уровня F_0 является многообразием всюду, кроме нуля).

Доказательство. Пусть $x \in F_z \cap S_2$ и множество уровня F_z не трансверсально к сфере S_2 в точке x . Тогда $dr^2(x)$ линейно выражается через $df(x)$ и $d\bar{f}(x)$, т. е. $dr^2(x) = \alpha df(x) + \beta d\bar{f}(x)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Имеем $df(x) = 2 \sum x_j dx_j$, $d\bar{f}(x) = 2 \sum \bar{x}_j d\bar{x}_j$, $dr^2(x) = \sum \bar{x}_j dx_j + \sum x_j d\bar{x}_j$, откуда следует, что $\bar{x}_j = 2\alpha x_j$ ($j = 1, \dots, n$). Но не все координаты x_j равны нулю. Поэтому $|2\alpha| = 1$, а значит, $r^2(x) = 2\alpha f(x)$, $|f(x)| = r^2(x) = 4$, что и требовалось доказать.

Из этой леммы следует, что множества $\bar{F}_z = F_z \cap \bar{B}_2$ являются при $0 < |z| < 4$ многообразиями с краем, диффеоморфными между

собой. Очевидно, что множество $\tilde{F}_0$ является конусом с вершиной в нуле и поэтому стягиваемо.

Лемма 3. При $0 < |z| < 4$ многообразие $\tilde{F}_z$ диффеоморфно пространству расслоения дисков касательного расслоения к стандартной $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} .

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $z=1$, т. е. рассматривать многообразие $\tilde{F}_1$. Пусть $x_j = u_j + iv_j$, где u_j и v_j вещественны. В координатах u_j, v_j многообразие $\tilde{F}_1$ задается уравнениями $\sum u_j^2 - \sum v_j^2 = 1$, $\sum u_j v_j = 0$, $\sum u_j^2 + \sum v_j^2 \leq 4$. В вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $\tilde{u}_j, \tilde{v}_j$ ($j=1, \dots, n$) пространство расслоения дисков касательного расслоения к стандартной $(n-1)$ -мерной сфере, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^n$, может быть задано в виде $\sum \tilde{u}_j^2 = 1$, $\sum \tilde{u}_j \tilde{v}_j = 0$, $\sum \tilde{v}_j^2 \leq \rho^2$ ($\rho > 0$ — радиус дисков расслоения, от которого тип пространства расслоения как дифференцируемого многообразия, конечно, не зависит). Нетрудно проверить, что преобразование $\tilde{u}_j = u_j / \sqrt{\sum u_j^2}$, $\tilde{v}_j = v_j$ задает требуемый диффеоморфизм (при $\rho^2 = 3/2$).

Отсюда следует, что $H_k(\tilde{F}_1) = 0$ при $k \neq n-1$, $H_{n-1}(\tilde{F}_1) = \mathbb{Z}$. При этом группа гомологий $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ порождена исчезающим циклом Пикара — Лефшеца Δ , представленным стандартной $(n-1)$ -мерной сферой $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum u_j^2 = 1, v_j = 0\}$.

Будем временно рассматривать многообразие $\tilde{F}_1$ с ориентацией, определяемой структурой касательного расслоения к сфере. Это означает, что в точке $(1, 0, \dots, 0)$ многообразия $\tilde{F}_1$ положительно ориентированной системой координат является $u_2, u_3, \dots, u_n, v_2, v_3, \dots, v_n$. Ориентация $\tilde{F}_1$ как комплексного многообразия определяется следующим упорядочением координат: $u_2, v_2, u_3, v_3, \dots, u_n, v_n$. Легко видеть, что эти две ориентации отличаются знаком $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

Индекс самопересечения нулевого сечения в пространстве касательного расслоения к многообразию совпадает с эйлеровой характеристикой χ этого многообразия. Это утверждение может быть доказано следующим образом. По одному из определений, эйлерова характеристика многообразия N — это количество особых точек общего векторного поля v на многообразии N , считаемых с кратностью $+1$ или -1 в соответствии с их индексами ($v: N \rightarrow TN$, $v(x) \in T_x N$). Для вычисления индекса самопересечения $(N \circ N)$ многообразия N как нулевого сечения касательного расслоения TN в пространстве этого расслоения, можно выбрать шевеление $\tilde{N}$ многообразия N в пространстве TN , которое пересекается с N трансверсально в конечном числе точек, и определить индексы пересечений $(N \circ \tilde{N})$ циклов N и $\tilde{N}$ в этих точках. В качестве

такого шевеления можно взять $\tilde{N} = \{(x, v(x))\}$, где $x \in N$, $v(x) \in T_x N$, v — векторное поле общего вида на многообразии N . Точки пересечений циклов N и $\tilde{N}$ совпадают с особыми точками векторного поля v . При этом несложные вычисления показывают, что индекс пересечения циклов N и $\tilde{N}$ в некоторой точке пересечения совпадает с индексом этой точки как особой точки векторного поля v .

Эйлерова характеристика $\chi(S^{n-1})$ $(n-1)$ -мерной сферы S^{n-1} равна $1 + (-1)^{n-1}$, т. е. равна 0 при четном n и 2 — при нечетном. Из того, что многообразие $\tilde{F}_1$ диффеоморфно пространству расслоения дисков касательного расслоения к $(n-1)$ -мерной сфере, следует, что индекс самопересечения исчезающего цикла Δ в многообразии $\tilde{F}_1$, ориентированном в соответствии со структурой пространства касательного расслоения к сфере на нем, равен $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$. Отсюда вытекает следующий результат:

Лемма 4. Индекс самопересечения исчезающего цикла Δ в комплексном многообразии $\tilde{F}_1$ равен

$$(\Delta \circ \Delta) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (1 + (-1)^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ +2 & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -2 & \text{при } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

По теореме двойственности Пуанкаре относительные группы гомологий $H_k(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ являются нулевыми при $k \neq n-1$, группа $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ изоморфна группе Z целых чисел. При этом группа $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ порождена относительным циклом ∇ , двойственным к исчезающему циклу Δ , т. е. таким, что индекс пересечения $(\nabla \circ \Delta)$ равен единице. В качестве представителя цикла ∇ может быть выбрано неособое подмногообразие

$$T = \{(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{F}_1: u_1 > 0, u_2 = \dots = u_n = 0\}$$

многообразия $\tilde{F}_1$, ориентированное подходящим образом. При диффеоморфизме многообразия уровня $\tilde{F}_1$ с пространством касательного расслоения к сфере, построенном в лемме 3, подмногообразие T соответствует слою этого расслоения, т. е. шар в касательном пространстве к сфере S^{n-1} в точке $(1, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим ограничение отображения f на $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2$ (B_2 — открытый шар радиуса 2, D_1 — замыкание диска радиуса 1 в плоскости $\mathbb{C}$). Оно определяет локально тривиальное, а следовательно, и тривиальное, расслоение $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2 \rightarrow \bar{D}_1$ над единичным диском $\bar{D}_1$. Поднятие Γ_t гомотопии $t \mapsto \tau'(t) = \exp(2\pi i t)$ до гомотопии слоя F_1 может быть выбрано согласованным со структурой прямого произведения на пространстве этого расслоения $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2$. Относительный цикл δ размерности k из $(F_1, \partial F_1)$ может быть

представлен в виде $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где δ_1 — относительный цикл из $(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$, а δ_2 — цепь в $F_1 \setminus B_2$. Преобразование обхода $h_{\tau'} = \Gamma_1$ неподвижно на $F_1 \setminus B_2$. Поэтому оно сохраняет цепь δ_2 и нетривиально действует только на цикл δ_1 . Таким образом, $\text{var}_{\tau'}(\delta) = \text{var}_{\tau'}(\delta_1)$ (здесь мы используем одни и те же обозначения для операторов монодромии $\text{var}_{\tau'}$, соответствующих парам $(M^n, \partial M^n)$ и $(\tilde{B}_2, \partial\tilde{B}_2)$). Если размерность k цикла δ отлична от $(n-1)$, то $\delta_1 = 0$ в группе относительных гомологий $H_k(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ (так как сама эта группа является нулевой). Отсюда вытекает следующее утверждение:

Лемма 5. *Во всех размерностях, кроме $(n-1)$ -й, оператор вариации $\text{var}_{\tau'}$ является нулевым, а операторы $h_{\tau'*}$ и $h_{\tau'*}^{(r)}$ — тождественными.*

Если $k = \dim \delta = (n-1)$, то $\delta_1 = m \cdot \nabla$ в группе гомологий $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$. При этом $m = (\delta \circ \Delta)$. Поэтому для того, чтобы определить действие оператора вариации $\text{var}_{\tau'}$, достаточно вычислить класс гомологий $\text{var}_{\tau'}(\nabla)$.

Теорема Пикара — Лефшеца.

$$\text{var}_{\tau'}(\nabla) = (-1)^{n(n+1)/2} \Delta.$$

Следствие. Для $a \in H_{n-1}(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$

$$\text{var}_{\tau'}(a) = (-1)^{n(n+1)/2} (a \circ \Delta) \Delta,$$

$$h_{\tau'*}^{(r)}(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2} (a \circ \Delta) i_*(\Delta);$$

для $a \in H_{n-1}(F_{z_0})$

$$h_{\tau'*}(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2} (a \circ \Delta) \Delta.$$

Последняя формула обычно называется *формулой Пикара — Лефшеца*. Для нечетного числа переменных n она вместе с леммой 4 показывает, что оператор Пикара — Лефшеца $h_{\tau'*}$ является отражением пространства $H_{n-1}(F_{z_0})$ в гиперплоскости, ортогональной (в смысле формы пересечения) соответствующему исчезающему циклу Δ .

Доказательство теоремы Пикара — Лефшеца может быть получено с помощью элементарных, хотя и довольно громоздких, прямых вычислений (см., например, [54]). Мы приведем ниже ее более инвариантное доказательство (см. п. 2.4). Здесь мы докажем ее для случая нечетного числа переменных n .

Существует естественное поднятие Ω_t гомотопии $t \mapsto \tau'(t) = \exp(2\pi i t)$ ($0 \leq t \leq 1$) до гомотопии слоя $\tilde{F}_1 \mapsto \tilde{F}_{\tau'(t)}$, не согласованное, впрочем, со структурой прямого произведения на краю. Это поднятие задается формулой $\Omega_t(x) = \exp(\pi i t) x$. Гомотопия Ω_t не годится для определения действия оператора вариации $\text{var}_{\tau'}$, но нетрудно видеть, что с ее помощью можно определить действие оператора монодромии $h_{\tau'*}$ на группе $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ гомологий

слоя. Очевидно, что преобразование Ω_1 является умножением на (-1) . В частности, на исчезающей сфере Δ оно совпадает с отражением в центре. Отсюда следует, что $\Omega_{1*}(\Delta) = h_{\tau'*}(\Delta) = (-1)^n \Delta$.

Пусть $i_*: H_{n-1}(\tilde{F}_1) \rightarrow H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ — естественный гомоморфизм, индуцированный включением $\tilde{F}_1 \hookrightarrow (\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$. Поскольку $(\Delta \circ \Delta) = (i_*(\Delta) \circ \Delta)$, $(\nabla \circ \Delta) = 1$, то из леммы 4 вытекает, что

$$i_*(\Delta) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (1 + (-1)^{n-1}) \nabla = \begin{cases} 0 & \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \nabla & \text{при } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Так как группа $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ гомологий слоя изоморфна группе целых чисел и порождена исчезающим циклом Δ , то $\text{var}_{\tau'}(\nabla) = m\Delta$ для некоторого целого числа m . Из того, что $h_{\tau'*} = \text{id} + \text{var}_{\tau'} \cdot i_*$, для нечетного числа переменных n получаем $-\Delta = h_{\tau'*}(\Delta) = \Delta + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{var}_{\tau'}(\nabla) = \Delta + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} m\Delta$. Отсюда следует $m = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$, что (для нечетного n) совпадает с утверждением теоремы Пикара—Лефшеца.

§ 2. Топология неособого множества уровня и оператор вариации особенности

2.1. Неособое множество уровня особенности. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — особенность, т. е. росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку. Из теоремы о неявных функциях следует, что в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ множество уровня $f^{-1}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ является неособым аналитическим многообразием, а множество уровня $f^{-1}(0)$ является неособым многообразием вне нуля. В точке $0 \in \mathbb{C}^n$ это множество уровня имеет особую точку.

Лемма 1. *Существует такое $\rho > 0$, что сфера $S_r \subset \mathbb{C}^n$ радиуса $r \leq \rho$ с центром в нуле трансверсально пересекается с множеством уровня $f^{-1}(0)$.*

Действительно, функция $\|x\|^2$ может принимать на множестве $f^{-1}(0)$ (в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$) лишь конечное число критических значений (для случая, когда f — полином, это утверждение, например, автоматически вытекает из «леммы об отборе кривых» из [79]; в общем случае оно выводится из аналогичных соображений). Выберем в качестве ρ такое число, квадрат которого меньше всех критических значений функции $\|x\|^2$ на многообразии $f^{-1}(0) - 0$. Условие того, что все критические значения функции $\|x\|^2$ на $f^{-1}(0) - 0$ больше, чем ρ^2 , эквивалентно тому, что при $r \leq \rho$ сфера S_r радиуса r с центром в нуле (являющаяся многообразием уровня функции $\|x\|^2$) трансверсально пересекается с многообразием $f^{-1}(0) - 0$.

Из леммы 1 следует, что для достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ многообразие уровня $f^{-1}(\varepsilon)$ также трансверсально к сфере S_ρ при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Таким образом, функция $f: \bar{B}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям 1°—3° п. 1.1 (с шаром $\bar{B}_\rho$ радиуса ρ с центром в нуле в качестве M^n , диском $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ радиуса ε_0 с центром в нуле в плоскости $\mathbb{C}$ в качестве U и единственной критической точкой 0). Нас будет интересовать топология множества уровня $f^{-1}(\varepsilon)$ в окрестности нуля.

Определение. Неособым множеством уровня особенности f вблизи критической точки 0 называется множество

$$V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n: f(x) = \varepsilon, \|x\| \leq \rho\}$$

при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, которое является комплексным многообразием с краем.

Многообразие V_ε определено однозначно с точностью до диффеоморфизма. Известно ([79]), что оно имеет гомотопический тип букета нескольких сфер размерности $(n-1)$. Количество $\mu = \mu(f)$ этих сфер называется *кратностью* или *числом Милнора* особенности f . Группы гомологий $H_k(V_\varepsilon)$ неособого множества уровня являются нулевыми при $k \neq (n-1)$, $H_{n-1}(V_\varepsilon) \cong Z^\mu$ — свободная абелева группа с μ образующими. Утверждение о группах гомологий $H_k(V_\varepsilon)$ неособого множества уровня мы докажем ниже (см. теорему 1). С небольшим дополнением (доказательством односвязности многообразия V_ε , которое выводится из тех же соображений, что и теорема 1) отсюда вытекает и результат о гомотопическом типе неособого множества уровня (для $n > 2$).

Фундаментальная группа $\pi_1(\bar{D}_{\varepsilon_0} - 0)$ дополнения к множеству критических значений изоморфна группе целых чисел и порождена классом петли γ_0 , обходящей критическое значение 0 один раз в положительном направлении (против часовой стрелки). Можно, например, положить

$$\gamma_0(t) = \varepsilon \cdot \exp(2\pi i t) \quad (|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, t \in [0, 1]).$$

Определение. Классической монодромией $h: V_\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$ особенности f называется монодромия h_{γ_0} петли γ_0 . Оператором классической монодромии особенности f называется автоморфизм $h_* = h_{\gamma_0*}$ группы $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня V_ε .

Оператором вариации особенности f называется оператор

$$\text{Var}_f = \text{var}_{\gamma_0}: H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon)$$

вариации петли γ_0 .

Базис группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon) \cong Z^{\mu(f)}$ неособого множества уровня V_ε особенности f может быть построен следующим образом. Пусть $\tilde{f} = f_\lambda$ — шевеление функции f , определенное в окрестности шара $\bar{B}_\rho$ (в качестве $\tilde{f}$ можно, например, взять шевеление

$f_\lambda = f + \lambda g$, где g — линейная функция $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$). Для достаточно малых λ ($|\lambda| \leq \lambda_0$) множество уровня $\tilde{f}^{-1}(\varepsilon)$ трансверсально к сфере S_ρ при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, и критические значения функции $\tilde{f}$ на шаре $\bar{B}_\rho$ по модулю меньше ε_0 . Легко показать, что неособое множество уровня $\tilde{f}^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ диффеоморфно неособому множеству уровня V_ε функции f при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Из теоремы Сарда следует, что почти все шевеления $\tilde{f}$ функции f имеют в шаре $\bar{B}_\rho$ только невырожденные критические точки с различными критическими значениями (в примере так будет для почти всех линейных функций g).

Докажем, например, что функция $\tilde{f} = f + g$ является морсовской для почти всех линейных функций $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Для этого рассмотрим отображение $df: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, задаваемое формулой

$$df(x) = (\partial f / \partial x_1(x), \dots, \partial f / \partial x_n(x)) \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n).$$

Почти все значения $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{C}^n$ являются некритическими для этого отображения (теорема Сарда). Если $(l_1, \dots, l_n)$ — некритическое значение отображения df , то функция $\tilde{f} - \sum_j l_j x_j$ имеет только невырожденные критические точки. Действительно, критические точки функции $\tilde{f} - \sum_j l_j x_j$ — это точки, в которых $\partial f / \partial x_j - l_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$), т. е. это — прообразы точки $(l_1, \dots, l_n)$ при отображении df . Поскольку значение $(l_1, \dots, l_n)$ является некритическим для отображения df , то в этих точках матрица $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_k)$ имеет ненулевой определитель, что и означает невырожденность соответствующих критических точек функции $\tilde{f} - \sum_j l_j x_j$. Множество некритических значений отображения df открыто. Поэтому добавление к $\tilde{f}$ подходящей малой линейной функции не выводит ее из класса функций, имеющих невырожденные критические точки, и позволяет добиться того, чтобы ее критические значения стали попарно различными.

Мы снова получили ситуацию, описанную в § 1. Пусть, как и раньше, $F_z = \tilde{f}^{-1}(z) \cap \bar{B}_\rho$ ($|z| \leq \varepsilon_0$), функция $\tilde{f}$ имеет в шаре $\bar{B}_\rho$ несколько критических точек p_i с различными критическими значениями z_i ($|z_i| < \varepsilon_0$, $i = 1, \dots, \mu$), $\{u_i\}$ — система путей, соединяющих критические значения z_i с некритическим значением z_0 ($|z_0| = \varepsilon_0$) и определяющих в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$ неособого множества уровня функции $\tilde{f}$ отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$. Напомним, что последнее означает, что пути u_i являются несамопересекающимися и попарно не имеют общих точек, кроме точки z_0 .

Теорема 1. *Отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$ образует базис (свободной абелевой) группы $H_{n-1}(F_{z_0}) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня особенности $\tilde{f}$. В частности, количество невырожденных критических точек функции $\tilde{f}$*

в $\bar{B}_\rho \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0})$ (на которые распадается критическая точка 0 функции $\tilde{f}$) равно кратности $\mu(f)$ особенности $\tilde{f}$. Группы $H_k(F_{z_0})$ являются нулевыми при $k \neq (n-1)$.

Доказательство. Пусть $X = \bar{B}_\rho \cap f^{-1}(D_{\varepsilon_0})$, $\tilde{X} = \bar{B}_\rho \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0})$, где $\rho > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ описаны выше. Покажем, что пространство X является стягиваемым.

Из того, что множество $f^{-1}(0)$ нулевого уровня функции f трансверсально к сферам S_r радиуса $r \leq \rho$ с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$, немедленно вытекает, что множество $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ гомеоморфно конусу над многообразием $f^{-1}(0) \cap S_\rho$ и, следовательно, стягиваемо. Стягивание множества $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ в точку 0, принадлежащую ему, можно осуществить с помощью векторного поля на нем, ортогонального к подмногообразиям $f^{-1}(0) \cap S_r$, $r \leq \rho$ (напомним, что множество $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ является многообразием всюду, кроме нуля).

В свою очередь пространство $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ является деформационным ретрактом пространства $X = f^{-1}(D_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$. Построить требуемую деформационную ретракцию пространства X можно, например, следующим образом. Выберем последовательность $\rho = r_0 > r_1 > r_2 \dots > 0$, монотонно стремящуюся к нулю. Пусть ε_i — такие числа, что $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > 0$ и множество уровня $f^{-1}(\varepsilon)$ трансверсально к сфере S_{r_i} радиуса r_i с центром в нуле при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_i$. Функция f определяет локально тривиальные, а следовательно, и тривиальные расслоения $E_i = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_i}) \rightarrow \bar{D}_{\varepsilon_i}$. При этом тривиализации этих расслоений могут быть выбраны так, что они будут совпадать на пересечениях $E_i \cap E_{i-1} = f^{-1}(D_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_{i-1}})$. Рассмотрим деформацию g_t диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$, определенную при $0 \leq t \leq \varepsilon_0$ и задаваемую формулой

$$g_t(x) = \begin{cases} t \cdot \frac{x}{\|x\|} & \text{при } \|x\| \geq t, \\ x & \text{при } \|x\| \leq t. \end{cases}$$

Отображение g_t переводит диск $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ радиуса ε_0 в диск радиуса t , оставляя последний неподвижным. Отображение g_0 является деформационной ретракцией диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ в точку 0. Поскольку функция f определяет локально тривиальные расслоения $f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0} - 0) \cap \bar{B}_{r_0} \rightarrow \bar{D}_{\varepsilon_0} - 0$, то существует семейство G_t ($0 < t \leq \varepsilon_0$) отображений множества $X = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_{r_0}$ в себя, поднимающее гомотопию g_{t_0} . Это семейство можно выбрать согласованным со структурой прямого произведения на множествах $E_i = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_i})$ при $t \leq \varepsilon_i$. Нетрудно видеть, что при этом семейство G_t ($0 < t \leq \varepsilon_0$) естественным образом доопределяется до семейства G_t с $0 \leq t \leq \varepsilon_0$,

в котором отображение G_0 является деформационной ретракцией множества X на нулевое множество уровня $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_{r_0}$.

Если $\tilde{f}$ — достаточно малое шевеление функции f , то пространство $\tilde{X}$ диффеоморфно пространству X (как гладкое многообразие с углами; на самом деле достаточно того, что $\tilde{X}$ гомотопически эквивалентно X) и поэтому тоже стягиваемо.

Функция $\tilde{f}$ отображает пространство $\tilde{X}$ в диск $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ и вне критических значений $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ является локально тривиальным расслоением со слоем F_{z_0} . Рассмотрим объединение $\bigcup_{i,t} u_i(t) = V$

образов путей u_i . Оно является деформационным ретрактом диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$. Нетрудно видеть, что деформационная ретракция диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ на пространство V может быть поднята до деформационной ретракции пространства $\tilde{X}$ на пространство $Y = \tilde{f}^{-1}(V)$ (аналогично тому, как деформационная ретракция диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ в точку 0 поднимается до деформационной ретракции пространства X на нулевое множество уровня $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_0$). Если из пространства Y выкинуть особые слои $\tilde{f}^{-1}(z_i)$, то оставшееся пространство

$Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)$ будет расслоено над стягиваемым пространством $V - \{z_i \mid i=1, \dots, \mu\}$. Следовательно, оно гомеоморфно прямому произведению слоя F_{z_0} на пространство $V - \{z_i \mid i=1, \dots, \mu\}$ и поэтому гомотопически эквивалентно слою F_{z_0} .

Нетрудно показать, что с точностью до гомотопического типа пространство Y получается из слоя F_{z_0} заклеиванием исчезающих сфер Δ_i n -мерными шарами $\mathbb{S}_i$. Здесь мы определим только отображение в одну сторону, определяющее гомотопическую эквивалентность рассматриваемых пространств. Пусть $s_i(t): S_i^{n-1} \rightarrow S_i(t) \subset F_{u_i(t)}$ ($0 \leq t \leq 1$) — семейство отображений стандартной $(n-1)$ -

мерной сферы S_i^{n-1} (индекс i просто фиксирует номер экземпляра), определяющее исчезающий цикл $\Delta_i = s_i(1)$ ($s_i(0): S_i^{n-1} \rightarrow p_i$). Пусть $\mathbb{S}_i$ — n -мерный шар, являющийся конусом над сферой S_i^{n-1} ($\mathbb{S}_i = [0, 1] \times S_i^{n-1} / 0 \times S_i^{n-1}$). Пространство $F_{z_0} \cup \{\Delta_i\} \cup \{\mathbb{S}_i\}$, получающееся из слоя F_{z_0} заклеиванием исчезающих циклов Δ_i n -мерными

шарами $\mathbb{S}_i$ — это факторпространство $F_{z_0} \cup \bigcup_{i=1}^{\mu} \mathbb{S}_i$ по отношению

эквивалентности $s_i(1)(a) \sim (1, a)$ ($a \in S_i^{n-1}$, $(1, a) \in \mathbb{S}_i$, $i=1, \dots, \mu$). Отображение φ его в пространство Y , которое является гомотопической эквивалентностью, может быть задано следующим образом: $\varphi(x) = x$ при $x \in F_{z_0} \subset Y$, $\varphi(t, a) = s_i(t)(a)$ при $(t, a) \in \mathbb{S}_i$, $0 \leq t \leq 1$, $a \in S_i^{n-1}$.

Имеет место точная гомологическая последовательность пары

$$(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)):$$

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(Y) \rightarrow H_{k+1}(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) \rightarrow H_k(Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(Y) \rightarrow \dots$$

Здесь $H_i(Y) = 0$ (поскольку пространство Y гомотопически эквивалентно стягиваемому пространству X ; напомним, что гомологии рассматриваются приведенными по модулю точки),

$$H_{k+1}(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) = \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_{k+1}(\mathbb{S}_i, \partial \mathbb{S}_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n-1, \\ Z^{\mu} & \text{при } k = n-1, \end{cases}$$

$H_k(Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) = H_k(F_{z_0})$. Из точности последовательности следует, что

$$H_k(F_{z_0}) \cong H_{k+1}(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n-1, \\ Z^{\mu} & \text{при } k = n-1, \end{cases}$$

причем образующая группы $H_n(\mathbb{S}_i, \partial \mathbb{S}_i)$ переходит в исчезающий цикл Δ_i . Отсюда и следует утверждение теоремы.

Нетрудно видеть, что из рассмотрения точной гомотопической последовательности пары $(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i))$ выводится односвязность

пространства $Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)$ или, что то же самое, — односвязность неособого множества уровня F_{z_0} при $n > 2$.

Из теоремы 1 вытекает, что кратность критической точки особенности $\tilde{f}$ равна количеству невырожденных критических точек, на которые она распадается при шевелении общего вида. Это количество равно количеству (близких к нулю) прообразов общей точки при отображении $df: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ($df(x_1, \dots, x_n) = (\partial f / \partial x_1(x), \dots, \partial f / \partial x_n(x))$). Отсюда может быть получена следующая формула для кратности изолированной критической точки функции f :

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n),$$

где ${}_n\mathcal{O}$ — кольцо ростков в нуле голоморфных функций n переменных, $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ — идеал в кольце ${}_n\mathcal{O}$, порожденный частными производными функции f (якобиев идеал ростка f). Это утверждение доказано в ОДО-1, § 5.

2.2. Исчезающие циклы и группа монодромии особенности.

В п. 2.1 было показано, что почти все шевеления $\tilde{f}$ особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ являются морсовскими, т. е. имеют в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ только невырожденные критические точки в количестве, равном кратности особенности f , причем все критические значения $z_1, \dots, z_{\mu}$ функции $\tilde{f}$ различны. При этом

неособое множество уровня V_ε особенности f диффеоморфно неособому многообразию уровня $F_{z_0} = \tilde{f}^{-1}(z_0) \cap \bar{B}_\rho$ функции $\tilde{f}$. Наличие такого диффеоморфизма позволяет ввести следующие определения.

Определение. *Исчезающим циклом Δ в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ неособого множества уровня особенности f называется элемент этой группы, соответствующий циклу в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$ неособого множества уровня функции $\tilde{f}$, исчезающему вдоль пути, соединяющему некоторое критическое значение z_i функции $\tilde{f}$ с некритическим значением z_0 .*

Определение. Базис группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня, состоящий из отмеченного набора исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$, называется *отмеченным базисом*. Базис, состоящий из слабо отмеченного набора исчезающих циклов, называется *слабо отмеченным*.

Теорема 1 утверждает, что любой отмеченный набор исчезающих циклов образует базис. Позже будет показано, что базис образует и любой слабо отмеченный набор (см. п. 2.6).

Замечание. Термины «отмеченный» и «слабо отмеченный» были введены А. М. Габриэловым. В работе [174] отмеченный базис называется геометрическим.

Определение. *Группой монодромии особенности f называется группа монодромии (морсовской) функции $\tilde{f}$.*

Нетрудно показать, что множество исчезающих циклов и группа монодромии особенности f не зависят от выбора морсовского шевеления $\tilde{f} = f_\lambda$ функции f . Для этого рассмотрим другое такое шевеление $\tilde{f} = f'_\nu$. Шевеления f_λ и f'_ν могут быть включены в одно двухпараметрическое семейство функций $f_{\lambda, \nu}$ ($f_{\lambda, 0} = f_\lambda$, $f_{0, \nu} = f'_\nu$). В качестве такого семейства можно, например, взять $f_{\lambda, \nu} = f_\lambda + f'_\nu - f$. В пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами (λ, ν) значения параметров (λ, ν) , которым соответствуют неморсовские функции $f_{\lambda, \nu}$, образуют (в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$) множество, которое является образом аналитического множества комплексной размерности один. Поэтому оно не разделяет пространство $\mathbb{C}^2$ значений параметров (λ, ν) . Отсюда следует, что шевеления $\tilde{f} = f_\lambda$ и $\tilde{f} = f'_\nu$ могут быть соединены непрерывным однопараметрическим семейством морсовских функций $f_{\lambda(t), \nu(t)}$ ($t \in [0, 1]$, $f_{\lambda(0), \nu(0)} = \tilde{f}$, $f_{\lambda(1), \nu(1)} = \tilde{f}$). Легко видеть, что вдоль такого семейства морсовских функций не меняются множество исчезающих циклов и группа монодромии.

По тем же соображениям независимыми от выбора шевеления являются понятия отмеченного и слабо отмеченного базисов.

Из результатов § 1 следует, что группа монодромии особенности f порождена операторами Пикара—Лефшеца h_i , соответствующими элементам Δ_i слабо отмеченного базиса в гомологиях неособого множества уровня функции f вблизи критической точки.

При нечетном числе переменных n эти операторы являются отражениями в гиперплоскостях, ортогональных (в смысле формы пересечения) исчезающим циклам Δ_i . Поэтому при нечетном числе переменных группа монодромии особенности является группой, порожденной отражениями.

Примеры. В качестве примеров можно рассмотреть функции $f(x) = x^3$ и $f(x, y) = x^3 + y^2$, имеющие особенности типа A_2 в смысле ОДО-1. Их морсовские шевеления могут быть выбраны в виде $\tilde{f}(x) = x^3 \pm 3\lambda x$ и $\tilde{f}(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ соответственно, где λ — малое положительное число. Отмеченные базисы в гомологиях неособого многообразия уровня и группы монодромии морсовских функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(x, y)$ (совпадающие с отмеченными базисами и группами монодромии особенностей $f(x)$ и $f(x, y)$) рассмотрены в примерах к п. 1.2.

2.3. Оператор вариации и форма Зейферта особенности. В п. 2.1 было введено понятие оператора вариации особенности. Для того чтобы изучить свойства этого оператора, дадим другую его интерпретацию ([149], [179]).

Пусть, как и выше, $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — особенность, т. е. росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку, ρ — достаточно маленькое положительное число, S_ρ^{2n-1} — сфера радиуса ρ с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$. Положим $K = f^{-1}(0) \cap S_\rho^{2n-1}$. Из того, что множество уровня $f^{-1}(0)$ трансверсально пересекается со сферой S_ρ^{2n-1} , следует, что K является гладким подмногообразием сферы S_ρ^{2n-1} коразмерности два. Обозначим через T достаточно малую открытую трубчатую окрестность многообразия K в сфере S_ρ^{2n-1} . Определим отображение $\Phi: S_\rho^{2n-1} \setminus T \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ дополнения к трубчатой окрестности многообразия K в окружность формулой $\Phi(x) = f(x)/|f(x)| = \exp(i \arg f(x))$. В [79] (§ 4) показано, что отображение Φ является гладким расслоением. При этом ограничение отображения Φ на границу $\partial(S_\rho^{2n-1} \setminus T) = \partial T$ имеет естественную структуру тривиального расслоения $K \times S^1 \rightarrow S^1$.

Ограничение функции f на $f^{-1}(S_{\varepsilon_0}^1) \cap \bar{B}_\rho$ определяет расслоение над окружностью $S_{\varepsilon_0}^1$ радиуса ε_0 , лежащей в комплексной прямой $\mathbb{C}$, слоем которого является неособое многообразие уровня $V_{\varepsilon_0} = f^{-1}(\varepsilon_0) \cap \bar{B}_\rho$ особенности f . При этом, как было объяснено выше, ограничение функции f на край $f^{-1}(S_{\varepsilon_0}^1) \cap S_\rho$ многообразия $f^{-1}(S_{\varepsilon_0}^1) \cap \bar{B}_\rho$ также имеет структуру тривиального расслоения. Операторы классической монодромии и вариации особенности определялись с помощью расслоения $f^{-1}(S_{\varepsilon_0}^1) \cap \bar{B}_\rho \rightarrow S_{\varepsilon_0}^1$.

Лемма 2 (см. [79], § 5). *Описанные два расслоения над окружностями S^1 и $S_{\varepsilon_0}^1$ эквивалентны (относительно изоморфизма окружностей, являющегося умножением на ε_0). В частности, слой $\Phi^{-1}(z)$ расслоения Φ диффеоморфен неособому множеству уровня особенности f вблизи критической точки.*

Таким образом, при определении оператора вариации Var_f особенности f можно пользоваться расслоением Φ . Как и раньше, через $\Gamma_t: \Phi^{-1}(1) \rightarrow \Phi^{-1}(\exp(2\pi it))$ будем обозначать семейство диффеоморфизмов, являющееся поднятием гомотопии $t \mapsto \exp(2\pi it)$ ($\Gamma_0 = \text{id}$, $t \in [0, 1]$) и согласованное со структурой прямого произведения на границе.

Сделаем небольшое отступление с целью напомнить некоторые определения.

Пусть M — ориентированное (вещественное) n -мерное многообразие с краем ∂M , $e_1, \dots, e_{n-1}$ — репер в касательном пространстве к краю ∂M в некоторой точке, e_0 — внешняя нормаль к краю ∂M в многообразии M в этой же точке. Говорят, что репер $e_1, \dots, e_{n-1}$ определяет ориентацию края ∂M , если репер $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ является положительно ориентированным репером в касательном пространстве к многообразию M . Аналогичное соглашение имеет место для цепей и их границ.

Пусть a и b — непересекающиеся $(n-1)$ -мерные циклы в $(2n-1)$ -мерной сфере S^{2n-1} . При $n=1$ будем дополнительно предполагать, что циклы a и b гомологичны нулю. При $n > 1$ это условие выполняется автоматически. Выберем в сфере S^{2n-1} n -мерную цепь A , граница которой совпадает с циклом a . Легко видеть, что индекс пересечения $(A \circ b)$ цепей A и b в сфере S^{2n-1} (который определен, поскольку граница цепи A , равная a , не пересекается с циклом b) не зависит от выбора цепи A . Действительно, если A' — другая такая цепь, то разность $(A - A')$ будет абсолютным n -мерным циклом в сфере S^{2n-1} , откуда $((A - A') \circ b) = 0$, т. е. $(A \circ b) = (A' \circ b)$. Индекс пересечения $(A \circ b)$ цепей A и b называется коэффициентом зацепления циклов a и b и обозначается $l(a, b)$.

Другой способ вычисления коэффициента зацепления состоит в следующем. Пусть D^{2n} — шар, границей которого является сфера S^{2n-1} . Выберем две n -мерные цепи $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в шаре D^{2n} , границы которых совпадают с циклами a и b соответственно и которые целиком лежат внутри шара D^{2n} , за исключением своих границ. В этом случае имеет смысл индекс пересечения $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$ цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в шаре D^{2n} и $l(a, b) = (A \circ b)_S = (-1)^n (\tilde{A} \circ \tilde{B})_D = (\tilde{B} \circ \tilde{A})_D = (-1)^n l(b, a)$.

Чтобы доказать это утверждение, надо заметить, что индекс пересечения $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$ корректно определен, т. е. не зависит от конкретного выбора цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, для которых $\partial \tilde{A} = a$, $\partial \tilde{B} = b$. Шар D^{2n} можно рассматривать как конус над сферой S^{2n-1} , т. е. как факторпространство произведения $[0, 1] \times S^{2n-1}$ отрезка $[0, 1]$ на сферу S^{2n-1} по подпространству $\{0\} \times S^{2n-1}$ (слоям $\{t\} \times S^{2n-1}$ ($0 \leq t \leq 1$) соответствуют в шаре концентрические сферы радиуса t). После этого в качестве цепи $\tilde{B}$ можно взять конус над циклом b с вершиной в центре шара D^{2n} ($\tilde{B} = [0, 1] \times b / \{0\} \times b$),

а в качестве цепи $\tilde{A}$ — объединение цилиндра $[1/2, 1] \times a$ над циклом a и цепи $\{1/2\} \times A$, лежащей на сфере $\{1/2\} \times S^{2n-1}$ радиуса $1/2$ ($A \subset S^{2n-1}$, $\partial A = a$; для $n=1$ см. рис. 17). В этом случае цепи $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ будут пересекаться в точках вида $(1/2, x)$, где x — точка пересечения цепи A с циклом b . Знак, которым отличаются соответствующие индексы пересечения, может быть несложно вычислен.

Вернемся к рассмотрению особенности f . Пусть a и b — $(n-1)$ -мерные циклы в слое $\Phi^{-1}(1)$ расслоения $\Phi: S^{2n-1} \setminus T \rightarrow S^1$. Цикл $\Gamma_{1/2} * b$ лежит в слое $\Phi^{-1}(-1)$ и поэтому не пересекается с циклом a . Следовательно, имеет смысл коэффициент зацепления циклов

a и $\Gamma_{1/2} * b$ как циклов, лежащих в $(2n-1)$ -мерной сфере.

Определение. *Формой Зейферта* особенности f называется билинейная форма L на группе гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1)) (\cong H_{n-1}(V_\varepsilon))$, определяемая формулой $L(a, b) = l(a, \Gamma_{1/2} * b)$, где $a, b \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$.

Теорема двойственности Александера утверждает, что коэффициент зацепления определяет двойственность групп гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $H_{n-1}(S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1))$. Нетрудно видеть, что слой $\Phi^{-1}(-1)$ является деформационным ретрактом пространства $S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1)$. Следовательно, группа гомологий $H_{n-1}(S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1))$ изоморфна группе $H_{n-1}(\Phi^{-1}(-1))$. Так как преобразование $\Gamma_{1/2} *$ является изоморфизмом групп гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $H_{n-1}(\Phi^{-1}(-1))$, то форма Зейферта определяет двойственность группы гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ самой себе, т. е. является невырожденной целочисленной билинейной формой с определителем, равным (± 1) . Заметим, что форма Зейферта L , вообще говоря, не обладает свойством симметрии.

Пусть $b \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $a \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$ — абсолютный и относительный по модулю края классы гомологий.

Лемма 3. $L(\text{Var}_f a, b) = (a \circ b)$.

Доказательство. Выберем относительный $(n-1)$ -мерный цикл в паре $(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$, являющийся представителем класса гомологий a (его мы также будем обозначать через a). Рассмотрим отображение $[0, 1] \times a \rightarrow S^{2n-1}$ цилиндра над циклом a в сферу, переводящее $(t, c) \in [0, 1] \times a$ в $\Gamma_t(c) \in S^{2n-1}$. При таком отображении нижнее основание $\{0\} \times a$ цилиндра $[0, 1] \times a$ переходит в цепь a , верхнее основание $\{1\} \times a$ — в цепь $\Gamma_1 a$, $[0, 1] \times da$ отображается в границу ∂T трубчатой окрестности многообразия K . Поэтому это отображение определяет n -мерную цепь в сфере S^{2n-1} (его образ), граница которой состоит из двух частей: вариации $\text{Var}_f a = \Gamma_1 a - a$ цикла a (лежащей в слое $\Phi^{-1}(1)$) и цикла, лежащего на ∂T . Затягивая вторую часть ее границы внутри трубчатой окрестности T по радиусам, мы получаем цепь A в сфере S^{2n-1} , граница которой лежит в слое $\Phi^{-1}(1) \subset S^{2n-1}$ и равна $\text{Var}_f(a)$.

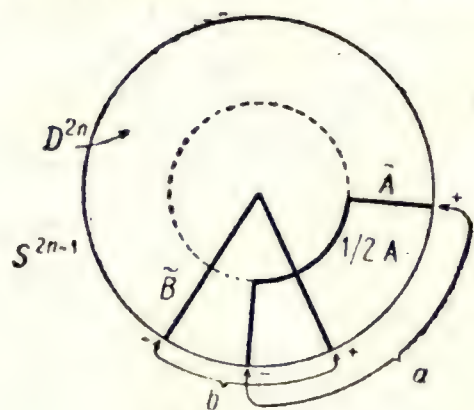


Рис. 17.

При этом пересечение цепи A с циклом $\Gamma_{1/2} * b$ совпадает с пересечением циклов $\Gamma_{1/2} * a$ и $\Gamma_{1/2} * b$ в слое $\Phi^{-1}(-1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} L(\text{Var}_f a, b) &= l(\text{Var}_f a, \Gamma_{1/2} * b) = \\ &= (A \circ \Gamma_{1/2} * b)_S = (\Gamma_{1/2} * a \circ \Gamma_{1/2} * b)_{\Phi^{-1}(-1)} = (a \circ b)_{\Phi^{-1}(1)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Так как форма Зейферта L определяет двойственность группы гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ самой себе, а индекс пересечения — двойственность групп $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$, то имеет место

Теорема 2. *Оператор вариации Var_f особенности f является изоморфизмом групп гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1)) \cong \cong H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ или, что то же самое, групп $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon) \cong \cong H_{n-1}(V_\varepsilon)$.*

Замечание. Если бы мы уже имели доказательство теоремы Пикара — Лефшеца в общем случае, то этот результат можно было бы получить, расписывая матрицу оператора Var_f в отмеченном базисе группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ и двойственном к нему базисе группы $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ (см. п. 2.5).

Из этой теоремы и леммы 3 вытекает

Теорема 3. *Если $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$, то*

$$L(a, b) = (\text{Var}^{-1} a \circ b).$$

Замечание. Определение коэффициента зацепления и формы Зейферта иногда отличаются от приводимых здесь знаком или перестановкой аргументов (например, в [149]).

Форма Зейферта $L(a, b)$ очень полезна при изучении топологического строения особенностей. В частности, оказывается, что форма Зейферта (или оператор вариации $(H_{n-1}(V_\varepsilon))^* \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon)$) определяет форму пересечений на группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня.

Теорема 4. *Для $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$*

$$(a \circ b) = -L(a, b) + (-1)^n L(b, a).$$

Доказательство. Так как оператор вариации особенности является изоморфизмом, существуют относительные циклы $a', b' \in H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ такие, что $a = \text{Var}_f a'$, $b = \text{Var}_f b'$. Остается применить утверждение леммы 1 п. 1.1 к циклам a' и b' .

Кроме формы пересечений, оператор вариации определяет также действие оператора классической монодромии особенности. Оператор, обратный оператору вариации, действует из группы $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня в двойственную ей группу $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$. Ему соответствует оператор $(\text{Var}_f^{-1})^T: H_{n-1}(V_\varepsilon) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$, определенный тем, что $((\text{Var}_f^{-1})^T a \circ b) = L(b, a) = (\text{Var}_f^{-1} b \circ a)$ для $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$. В матричной записи это условие означает, что матрица оператора $(\text{Var}_f^{-1})^T$ получается из матрицы оператора Var_f^{-1} транспонированием.

Теорема 5 ([172]). Оператор h_* классической монодромии особенности выражается через ее оператор вариации Var_f по формуле

$$h_* = (-1)^n \text{Var} (\text{Var}^{-1})^T.$$

Доказательство. Имеет место равенство $(x \circ y) = (i_* x \circ y)$, где $x, y \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$, i_* — гомоморфизм $H_{n-1}(V_\varepsilon) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$, индуцированный вложением $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$. Вместе с теоремой 4 оно дает

$$i_* = -\text{Var}_f^{-1} + (-1)^n (\text{Var}_f^{-1})^T.$$

Для оператора классической монодромии особенности имеем $h_* = \text{id} + \text{Var}_f i_* = \text{id} - \text{Var}_f \text{Var}_f^{-1} + (-1)^n \text{Var}_f (\text{Var}_f^{-1})^T = (-1)^n \text{Var}_f \times (\text{Var}_f^{-1})^T$, что и требовалось доказать.

Аналогичное утверждение имеет место для действия классической монодромии в относительной группе гомологий.

Теорема 6. $h_*^{(r)} = (-1)^n (\text{Var}^{-1})^T \text{Var}$.

2.4. Доказательство теоремы Пикара — Лефшеца. Здесь мы используем обозначения п. 1.3.

Из того, что оператор вариации $\text{var}_{\tau'}: H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial \tilde{F}_1) \rightarrow H_{n-1}(\tilde{F}_1)$, как оператор вариации особенности $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, является изоморфизмом (теорема 2), следует, что $\text{var}_{\tau'}(\nabla) = \pm \Delta$. Для определения знака в этой формуле воспользуемся теоремой 3. В определении расслоения Φ (для критической точки 0 функции $x_1^2 + \dots + x_n^2$) можно считать, что $\rho = 1$. Расслоение $\Phi: S^{2n-1} \setminus T \rightarrow S^1$ задается формулой $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{|x_1^2 + \dots + x_n^2|}$ ($|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1$). Слой $\Phi^{-1}(1)$ этого расслоения диффеоморфен многообразию уровня $\tilde{F}_1$. При этом исчезающему циклу Δ в многообразии $\tilde{F}_1$ соответствует в слое $\Phi^{-1}(1)$ цикл, определяемый уравнениями $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, $\text{Im } x_j = 0$. Этот цикл мы также будем обозначать через Δ .

Имеем $(\text{Var}^{-1} \Delta \circ \Delta) = L(\Delta, \Delta) = l(\Delta, \Gamma_{1/2*} \Delta) = (-1)^n (\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — n -мерные цепи в шаре $D = D^{2n}$, границы которых лежат на сфере S^{2n-1} и равны Δ и $\Gamma_{1/2*} \Delta$ соответственно. Нетрудно видеть, что для вычисления коэффициента зацепления $l(\Delta, \Gamma_{1/2*} \Delta)$ можно воспользоваться семейством диффеоморфизмов $\Gamma_t: \Phi^{-1}(1) \rightarrow \Phi^{-1}(\exp(2\pi i t))$, которое не обязательно согласовано со структурой прямого произведения на границе. В качестве него можно взять семейство, определяемое формулой $\Gamma_t(x_1, \dots, x_n) = (\exp(\pi i t) x_1, \dots, \exp(\pi i t) x_n)$. Тогда цикл $\Gamma_{1/2*} \Delta$ будет определяться уравнениями $x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1$ и $\text{Re } x_j = 0$. В качестве цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ можно взять цепи в шаре D^{2n} , задаваемые уравнениями $\{\text{Im } x_j = 0\}$ и $\{\text{Re } x_j = 0\}$ соответственно. При этом ориентации цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ согласованы при помощи отображения $\tilde{A}$ в $\tilde{B}$,

являющегося умножением на i . Если положительно ориентированной системой координат на диске $\tilde{A}$ является набор $u_1, \dots, u_n$ ($x_j = u_j + iv_j$), то положительно ориентированной системой координат на диске $\tilde{B}$ будет $v_1, \dots, v_n$. Цепи $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ являются гладкими многообразиями (n -мерными дисками) и пересекаются трансверсально в точке 0. Отсюда следует, что $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Поэтому $(\text{Var}^{-1} \Delta \circ \Delta) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, т. е. $\text{Var}^{-1} \Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \nabla$, $\text{Var} \nabla = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta$, что и требовалось доказать.

2.5. Матрица пересечений особенности. Как уже говорилось, группа монодромии особенности порождена операторами Пикара — Лефшеца h_i , соответствующими элементам Δ_i слабо отмеченного базиса в гомологиях неособого множества уровня особенности f вблизи критической точки. По теореме Пикара — Лефшеца имеем

$h_i(a) = a + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i) \Delta_i$. Таким образом, матрица попарных пересечений элементов слабо отмеченного базиса определяет группу монодромии особенности.

Определение. Матрица $S = (\Delta_i \circ \Delta_j)$ называется *матрицей пересечений* особенности f (в базисе $\{\Delta_i\}$).

Замечание. Здесь мы считаем i номером столбца, а j — номером строки. Такая запись матрицы билинейной формы совпадает с ее записью как матрицы оператора (в данном случае — i_*) из пространства гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ в двойственное пространство $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ в базисах $\{\Delta_i\}$ и двойственном к нему $((\Delta_i \circ \Delta_j) = (i_* \Delta_i \circ \Delta_j))$.

Определение. *Билинейной формой, ассоциированной с особенностью f* , называется целочисленная билинейная форма, определенная на группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня особенности f индексом пересечения.

Билинейная форма, ассоциированная с особенностью, симметрична при нечетном числе переменных n и кососимметрична при четном. Матрица пересечений особенности является матрицей этой формы в базисе $\{\Delta_i\}$. Диагональные элементы матрицы пересечений определяются леммой 4 п. 2.3 и равны 0 при четном n и ± 2 — при нечетном.

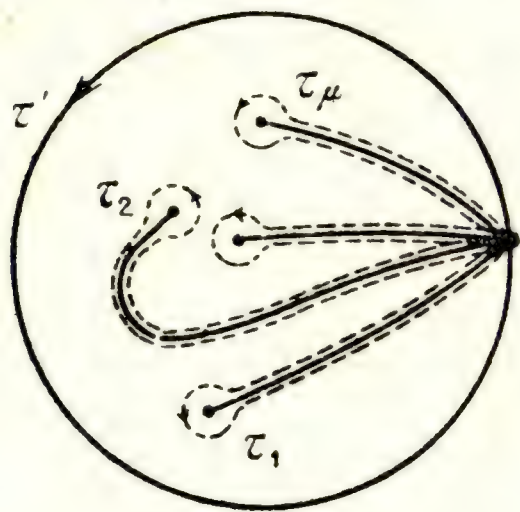


Рис. 18.

Если $\tilde{f}$ — шевеление функции f , $\{\Delta_i\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов, определяемый системой путей $u_1, \dots, u_\mu$, то петля τ' , обходящая в положительном направлении все критические значения, на которые распадается нулевое критическое значение функции f , гомотопна произведению $\tau_\mu \cdot \dots \cdot \tau_1$ простых петель,

соответствующих путям $u_\mu, \dots, u_1$ (рис. 18). Отсюда вытекает

Лемма 4. *Оператор h_* классической монодромии особенности f равен произведению $h_1 \cdot \dots \cdot h_\mu$ операторов Пикара—Лефшеца, соответствующих элементам Δ_i отмеченного базиса в гомологиях неособого многообразия уровня.*

Действие оператора вариации особенности f может быть определено по формулам

$$\begin{aligned} \text{Var}_f &= \text{var}_{\tau_\mu} \cdot \dots \cdot \tau_1 = \\ &= \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{var}_{\tau_{i_1}} \cdot i_* \cdot \text{var}_{\tau_{i_2}} \cdot i_* \cdot \dots \cdot i_* \cdot \text{var}_{\tau_{i_r}}, \\ \text{var}_{\tau_i}(a) &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i) \Delta_i \quad (a \in H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)). \end{aligned} \quad (*)$$

Выберем в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$, являющейся двойственной к группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, базис $\{\nabla_i\}$, двойственный к базису $\{\Delta_i\}$, т. е. такой, что $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$. Из формул (*) следует, что $\text{Var}_f(\nabla_i) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta_i + \sum_{j < i} c_{ij}^i \Delta_j$, где c_{ij}^i —некоторые целые числа. Тем самым нами доказана

Лемма 5. *В отмеченном базисе матрица оператора вариации Var_f особенности f является верхней треугольной матрицей с диагональными элементами, равными $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.*

Теми же свойствами обладает и матрица оператора Var_f^{-1} , которая по теореме 3 совпадает с матрицей формы Зейферта L особенности f (см. замечание в начале пункта, определяющее матричную запись билинейных форм).

Пусть S —матрица пересечений особенности f в каком-нибудь базисе, L —матрица формы Зейферта (или оператора Var^{-1}) этой особенности в том же базисе, H —матрица оператора классической монодромии h_* , $H^{(r)}$ —матрица оператора $h_*^{(r)}$ в двойственном базисе. Теоремы 4, 5 и 6 означают, что $S = -L + (-1)^n L^T$, $H = (-1)^n L^{-1} L^T$, $H^{(r)} = (-1)^n L^T L^{-1}$ (значок T означает транспонированную матрицу). Если $\{\Delta_i\}$ —отмеченный базис исчезающих циклов, то в нем матрица L является верхней треугольной, а матрица L^T —нижней треугольной. Таким образом, в отмеченном базисе имеет инвариантный смысл разложение матрицы пересечений в сумму верхней треугольной и нижней треугольной матриц.

Выше говорилось, что матрица пересечений особенности в отмеченном базисе определяет ее оператор классической монодромии (в том же базисе). Имеет место и обратное утверждение. Прежде чем его доказать, сформулируем одно полезное общее утверждение.

Лемма 6. *Пусть A и B —верхние треугольные матрицы с единицами на диагонали, $C = A \cdot B^T$. Тогда матрицы A и B восстанавливаются по матрице C .*

Следующая формулировка этого утверждения эквивалентна исходной.

Лемма 7. Пусть A и B — верхние треугольные матрицы с единицами на диагонали. Если AB^T — единичная матрица, то A и B — тоже единичные.

Доказательство этой леммы не представляет труда.

Теорема 7 ([174]). Матрица оператора классической монодромии особенности в отмеченном базисе определяет ее оператор вариации и матрицу пересечений.

Доказательство получается применением леммы 6 к равенству $H = (-1)^n \tilde{L}^{-1} \tilde{L}^T$, $\tilde{L} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} L$, в котором $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^{-1}$ — верхние треугольные матрицы с единицами на диагонали.

2.6. Замены базиса. Система путей $\{u_i\}$, определяющая отмеченный или слабо отмеченный базис, может быть выбрана неоднозначно. Меняя исходную систему путей, можно получать разные базисы из исчезающих циклов в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомотопий неособого множества уровня особенности вблизи критической точки. Мы опишем некоторые элементарные операции замены базиса, сохраняющие его отмеченность или слабую отмеченность.

Пусть $\{u_i\}$ — система путей, определяющая отмеченный базис $\{\Delta_i\}$ в группе $H_{n-1}(F_{z_0}) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомотопий неособого многообразия уровня. Это означает, что u_i — несамопересекающиеся пути, соединяющие критические значения z_i шевеления $\tilde{f}$ функции f с некритическим значением z_0 и пересекающиеся попарно только в точке z_0 . Пусть τ_i — простые петли, соответствующие путям u_i .

Определение операции α_m ($1 \leq m < \mu$). Определим новую систему путей $\{\tilde{u}_i\}$ следующим образом: $\tilde{u}_i = u_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{u}_{m+1} = u_m$; $\tilde{u}_m = u_{m+1} \tau_m$. Здесь под $u_{m+1} \tau_m$ понимается путь, получающийся последовательным прохождением пути u_{m+1} и петли τ_m . Очевидно (см. ниже), что система путей $\{\tilde{u}_i\}$ определяет слабо отмеченный набор исчезающих циклов $\{\tilde{\Delta}_i\}$. Нетрудно видеть, что можно немного продеформировать систему путей $\{\tilde{u}_i\}$

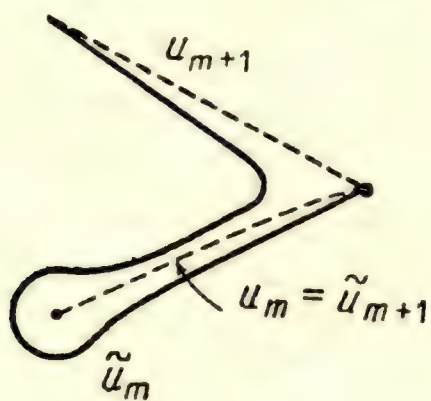


Рис. 19.

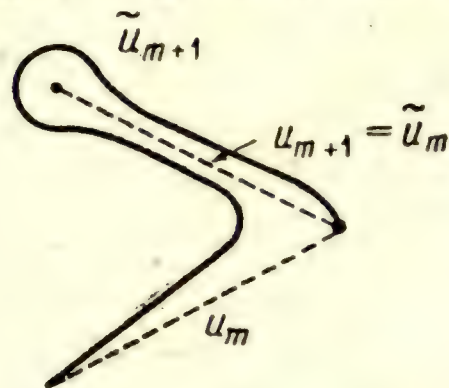


Рис. 20.

так, чтобы она стала удовлетворять условиям определения отмеченного базиса (рис. 19). Поэтому базис $\{\tilde{\Delta}_i\}$ является отмеченным. Связь базиса $\{\tilde{\Delta}_i\}$ с базисом $\{\Delta_i\}$ дается следующими формулами:

$\tilde{\Delta}_i = \Delta_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{\Delta}_{m+1} = \Delta_m$; $\tilde{\Delta}_m = h_m(\Delta_{m+1}) = \Delta_{m+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (\Delta_{m+1} \circ \Delta_m) \Delta_m$ (преобразование Пикара—Лефшеца).

Операцию перехода от отмеченного базиса $\{\Delta_i\}$ к отмеченному базису $\{\tilde{\Delta}_i\}$, описываемую этими формулами, обозначим через α_m .

Определение операции β_{m+1} ($1 \leq m < \mu$). Пусть система путей $\{\tilde{u}'_i\}$ определена следующим образом: $\tilde{u}'_i = u_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{u}'_m = u_{m+1}$; $\tilde{u}'_{m+1} = u_m \tau_{m+1}^{-1}$ (рис. 20). Эта система путей определяет отмеченный базис $\{\tilde{\Delta}'_i\}$, связанный с базисом $\{\Delta_i\}$ формулами: $\tilde{\Delta}'_i = \Delta_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{\Delta}'_m = \Delta_{m+1}$; $\tilde{\Delta}'_{m+1} = h_{m+1}^{-1}(\Delta_m) = \Delta_m + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_{m+1} \circ \Delta_m) \Delta_{m+1}$ (обратное преобразование Пикара—Лефшеца). Операцию перехода от отмеченного базиса $\{\Delta_i\}$ к отмеченному базису $\{\tilde{\Delta}'_i\}$, описываемую этими формулами, обозначим через β_{m+1} .

Нетрудно видеть, что операция β_{m+1} является обратной к операции α_m в том смысле, что последовательное применение их в любом порядке приводит к исходному базису. Рассмотрим свободную группу, порожденную элементами α_m ($m = 1, \dots, \mu - 1$). Каждому элементу этой группы (слову из букв α_m и α_m^{-1}) соответствует операция замены отмеченного базиса (считается, что действие α_m^{-1} на базис совпадает с действием операции β_{m+1}). Очевидно, что действия операций $\alpha_m \alpha_{m'}$ и $\alpha_{m'} \alpha_m$ совпадают при $|m - m'| \geq 2$. Кроме того, совпадают действия операций $\alpha_m \alpha_{m+1} \alpha_m$ и $\alpha_{m+1} \alpha_m \alpha_{m+1}$ для любого m от 1 до $(\mu - 2)$. «Доказательство» этого факта приведено на рис. 21.

Таким образом, на множестве отмеченных базисов группы гомологий неособого множества уровня вблизи критической точки действует факторгруппа свободной группы с $(\mu - 1)$ -й образующей α_m ($m = 1, \dots, \mu - 1$) по соотно-

шениям $\alpha_{m+1} \alpha_m \alpha_{m+1} = \alpha_m \alpha_{m+1} \alpha_m$ при $1 \leq m < \mu - 1$, $\alpha_m \alpha_{m'} = \alpha_{m'} \alpha_m$ при $|m - m'| \geq 2$. Эта группа является группой кос из μ нитей (см., например, [50]; см. также п. 3.3).

Рассмотрим операции, сохраняющие слабую отмеченность набора исчезающих циклов. Предварительно покажем, что всякий

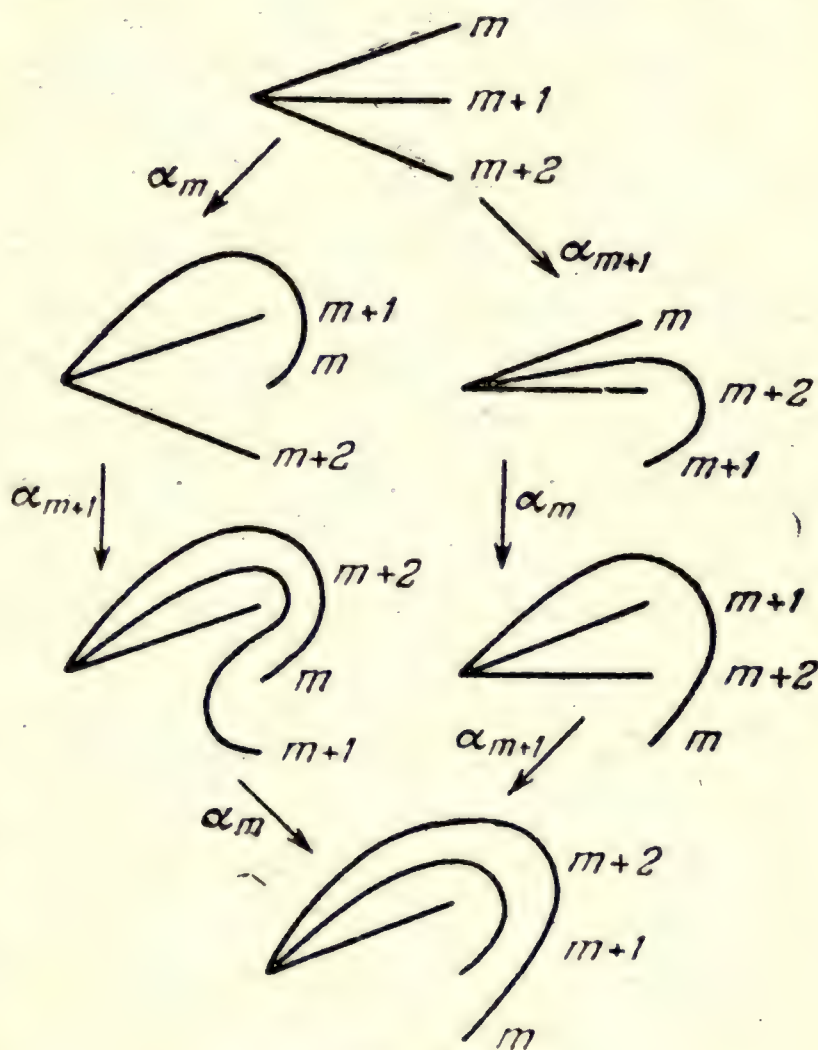


Рис. 21.

такой набор образует базис в гомологиях неособого многообразия уровня.

Теорема 8. *Любой слабо отмеченный набор исчезающих циклов образует базис в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня.*

Пусть $\{\Delta_i\}$ — слабо отмеченный набор исчезающих циклов, определенный системой путей $\{u_i\}$, τ_i — соответствующие простые петли. Набор петель $\{\tau_i\}$ является системой свободных образующих фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ дополнения к множеству критических значений. Чтобы доказать, что набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$ образует базис в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, достаточно показать, что любой исчезающий цикл Δ (определенный при помощи пути v , соединяющего критическое значение z_j с некритическим значением z_0) линейно выражается через циклы $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ с целыми коэффициентами. Можно считать, что пути u_j и v совпадают около критического значения z_j . В этом случае петля $\gamma = u_j^{-1}v$ может рассматриваться как элемент фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ дополнения к множеству критических значений. При этом $\Delta = \pm h_{\gamma*} \Delta_j$ (знак зависит от ориентации исчезающих циклов Δ и Δ_j). В группе $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ петля γ может быть разложена по образующим $\tau_1, \dots, \tau_\mu$. Следовательно, исчезающий цикл Δ может быть получен из цикла Δ_j последовательным применением нескольких операторов Пикара — Лефшеца h_i и обратных им, а поэтому линейно выражается через циклы $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ с целыми коэффициентами.

Определение операций $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ замены слабо отмеченного базиса. Пусть $\{u_i\}$ — система путей, определяющая слабо отмеченный базис $\{\Delta_i\}$ в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня. Для $m \neq m'$ определим операцию замены базиса $\alpha_m(m')$ ($\beta_m(m')$), соответствующую замене пути $u_{m'}$ на путь $u_{m'} \tau_m (u_{m'} \tau_m^{-1})$, т. е. переводящую слабо отмеченный базис $\{\Delta_i\}$ в базис $\{\tilde{\Delta}_i\}$, определяемый формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_i &= \Delta_i \text{ при } i \neq m', \quad \tilde{\Delta}_{m'} = h_m(\Delta_{m'}) = \Delta_{m'} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_{m'} \circ \Delta_m) \Delta_m \cdot \\ &\cdot (\tilde{\Delta}_{m'} = h_m^{-1}(\Delta_{m'}) = \Delta_{m'} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Delta_m \circ \Delta_{m'}) \Delta_m). \end{aligned}$$

Действие операций $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ на системе простых петель $\{\tau_i\}$ состоит в замене петли $\tau_{m'}$ на сопряженную ей в фундаментальной группе $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ дополнения к множеству критических значений ($\tau_m^{-1} \tau_{m'} \tau_m$ для $\alpha_m(m')$ и $\tau_m \tau_{m'} \tau_m^{-1}$ для $\beta_m(m')$). Таким образом, если исходная система простых петель являлась системой свободных образующих группы $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$, то этим же свойством будет обладать и система простых петель, полученная после применения операции $\alpha_m(m')$ или $\beta_m(m')$. Поэтому операции $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ сохраняют слабую отмеченность базиса.

Легко видеть, что операции $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ взаимно обратны. При нечетном числе переменных n эти операции совпадают. Если отмеченные базисы рассматривать как слабо отмеченные и, в частности, отвлекаясь от порядка исчезающих циклов, то действие операции α_m совпадает с действием операции $\alpha_m(m+1)$, а β_{m+1} — с $\beta_{m+1}(m)$.

2.7. Оператор вариации и матрица пересечений «прямой суммы» особенностей.

Определение. Прямой суммой особенностей $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ и $g: (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ функций n и m переменных соответственно называется особенность функции $(n+m)$ переменных $f \oplus g: (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, определяемая формулой $f \oplus g(x, y) = f(x) + g(y)$ ($x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$, $(x, y) \in \mathbb{C}^{n+m} \approx \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$).

Лемма 8. Кратность $\mu(f \oplus g)$ прямой суммы особенностей f и g равна произведению $\mu(f)\mu(g)$ их кратностей.

Действительно, если $\tilde{f}(x)$ — шевеление особенности f , имеющее $\mu(f)$ невырожденных критических точек p_i , $\tilde{g}(y)$ — шевеление особенности g , имеющее $\mu(g)$ невырожденных критических точек q_j , то $\tilde{f}(x) + \tilde{g}(y)$ — шевеление особенности $f \oplus g$, имеющее $\mu(f)\mu(g)$ невырожденных критических точек (p_i, q_j) ($i = 1, \dots, \mu(f)$; $j = 1, \dots, \mu(g)$).

М. Себастьяни и Р. Том ([215]) доказали, что оператор классической монодромии особенности $f \oplus g$ равен тензорному произведению операторов классической монодромии особенностей f и g . А. М. Габриэлов ([36]) получил описание матрицы пересечений особенности $f \oplus g$ при условии, что известны матрицы пересечений особенностей f и g в отмеченных базисах. Мы изложим эти результаты в форме, несколько отличной от [215] и [36].

Нам понадобится одно топологическое понятие.

Определение. Джойном (или соединением) $X * Y$ топологических пространств X и Y называется факторпространство прямого произведения $X \times I \times Y$ ($I = [0, 1]$) по отношению эквивалентности:

$$\begin{aligned} (x, 0, y_1) &\sim (x, 0, y_2) \text{ для любых } y_1, y_2 \in Y, x \in X; \\ (x_1, 1, y) &\sim (x_2, 1, y) \text{ для любых } x_1, x_2 \in X, y \in Y. \end{aligned}$$

Можно считать, что пространства X и Y вложены в их джойн $X * Y$ как нижнее и верхнее основания соответственно ($\{(x, 0, y)\}$ и $\{(x, 1, y)\}$). При этом джойн $X * Y$ можно представлять себе как пространство, заметаемое непересекающимися отрезками, соединяющими все точки пространства X со всеми точками пространства Y . Если рассмотреть проекцию $(x, t, y) \mapsto t$ джойна $X * Y$ в отрезок $I = [0, 1]$, то прообраз точки 0 совпадает с пространством X , точки 1 — с пространством Y , а точки $t \in (0, 1)$ — с произведением $X \times Y$.

Если Y — пространство, состоящее из одной точки, то джойн

$X * Y$ совпадает с конусом над пространством X . Если Y — пространство, состоящее из двух точек, то джойн $X * Y$ гомеоморфен надстройке над пространством X (факторпространству цилиндра $[-1, 1] \times X$ над пространством X по отношению эквивалентности $(-1, x_1) \sim (-1, x_2)$, $(1, x_1) \sim (1, x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$). Если пространство X гомеоморфно k -мерной сфере S^k , Y — l -мерной сфере S^l , то джойн $X * Y$ гомеоморфен $(k + l + 1)$ -мерной сфере S^{k+l+1} .

Лемма 9. Пусть группы гомологий пространств X и Y либо не имеют кручений, либо считаются с коэффициентами в поле. Тогда группа гомологий $H_n(X * Y)$ джойна пространств X и Y изоморфна $\bigoplus_{0 \leq k \leq n-1} H_k(X) \otimes H_{n-k-1}(Y)$.

Иначе говоря, $H_*(X * Y) = H_*(X) \otimes H_*(Y)$, где считается, что $\dim(a \otimes b) = \dim a + \dim b + 1$ для $a \in H_*(X)$, $b \in H_*(Y)$. При этом, если α — цикл в пространстве X , β — цикл в пространстве Y , то циклом, соответствующим $\alpha \otimes \beta$ в пространстве $X * Y$, является джойн циклов α и β . Здесь существенно, что группы гомологий считаются приведенными по модулю точки.

Изоморфизм $H_*(X * Y) \cong H_*(X) \otimes H_*(Y)$, вообще говоря, определен только с точностью до умножения на (± 1) . В случае, когда X и Y — ориентированные многообразия, выбор конкретного изоморфизма определяется выбором ориентации произведения $X \times I \times Y$. Заметим, впрочем, что формулируемые ниже результаты не зависят от этого выбора.

Пусть f — особенность $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, V_ε — неособое многообразие уровня особенности f вблизи критической точки ($V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$), u — путь, соединяющий не критическое значение ε с критическим значением 0.

Лемма 10. Существует такое непрерывное семейство отображений $H_t: V_\varepsilon \rightarrow V_{u(t)} = f^{-1}(u(t)) \cap \bar{B}_\rho$ ($t \in [0, 1]$), что

1° $H_0 = \text{id}: V_\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$;

2° H_t является вложением $V_\varepsilon \rightarrow V_{u(t)}$ при $0 \leq t < 1$;

3° H_1 переводит V_ε в точку $0 \in \mathbb{C}^n$.

Доказательство этого утверждения может быть проведено аналогично тому, как в теореме 1 показано, что пространство $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ является деформационным ретрактом пространства $f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$.

Семейство отображений H_t определено однозначно с точностью до изотопии. Оно задает вложение конуса над неособым многообразием уровня V_ε в пространство $\mathbb{C}^n$ $((x, t) \rightarrow H_t(x))$ при $0 \leq t \leq 1$.

Пусть теперь f и g — две особенности n и m переменных соответственно, $V_\varepsilon(f) = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_{\rho_1}$ и $V_\varepsilon(g) = g^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_{\rho_2}$ — неособые многообразия уровня особенностей f и g , u — путь в плоскости значений функции f , соединяющий ε с нулем (не теряя общности, можно считать, что $u(t) = (1 - t)\varepsilon$). Определим путь v , соединяю-

щий ε с нулем в плоскости значений функции g , формулой $v(t) = \varepsilon - u(1-t)$. Пусть $H_t(f)$ и $H_t(g)$ — семейства отображений $V_\varepsilon(f) \rightarrow V_{u(t)}(f)$ и $V_\varepsilon(g) \rightarrow V_{u(t)}(g)$, описанные в лемме 10. Определим вложение j джойна $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$ неособых многообразий уровня $V_\varepsilon(f)$ и $V_\varepsilon(g)$ в множество уровня $(f \oplus g)^{-1}(\varepsilon) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ формулой $j(x, t, y) = (H_t(f)x, H_{1-t}(g)y)$ при $x \in V_\varepsilon(f)$, $y \in V_\varepsilon(g)$, $t \in [0, 1]$. При выполнении естественных ограничений на радиусы ρ_1 , ρ_2 и ρ (например, $\rho_1 \leq \rho/\sqrt{2}$, $\rho_2 \leq \rho/\sqrt{2}$) j является вложением джойна $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$ в многообразие уровня $V_\varepsilon(f \oplus g) = (f \oplus g)^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ особенности $f \oplus g$ вблизи критической точки.

Отображение $j: V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \rightarrow V_\varepsilon(f \oplus g)$ вместе с изоморфизмом $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon(f)) \otimes H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$ определяет гомоморфизм

$$j_*: H_{n-1}(V_\varepsilon(f)) \otimes H_{m-1}(V_\varepsilon(g)) \rightarrow H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g)).$$

В работе [215] доказана

Теорема 9. *Гомоморфизм j_* является изоморфизмом, вложение $j: V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \rightarrow V_\varepsilon(f \oplus g)$ является гомотопической эквивалентностью.*

То, что неособое многообразие уровня $V_\varepsilon(f \oplus g)$ особенности $f \oplus g$ гомотопически эквивалентно джойну $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$, можно объяснить следующим образом. Рассмотрим функцию f на многообразии $V_\varepsilon(f \oplus g)$ (точнее, — функцию $f \circ \pi_1$, где $\pi_1: V_\varepsilon(f \oplus g) \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+m} \approx \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ — проекция на первое слагаемое). Прообраз $(f \circ \pi_1)^{-1}(z)$ точки $z \in \mathbb{C}$ состоит из точек $(x, y) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$, для которых $f(x) = z$, $g(y) = \varepsilon - z$. Поэтому (если отвлечься от тонкостей, связанных с радиусами шаров, в которых рассматриваются неособые многообразия уровня функций) $(f \circ \pi_1)^{-1}(z) = f^{-1}(z) \times g^{-1}(\varepsilon - z)$. Отображение $(f \circ \pi_1): V_\varepsilon(f \oplus g) \rightarrow \mathbb{C}$ является невырожденным вне прообразов точек 0 и ε . Рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ отрезок $J = u([0, 1])$, являющийся образом пути u . Он соединяет точки 0 и ε ($u(0) = \varepsilon$, $u(1) = 0$). Над дополнением к отрезку J отображение $f \circ \pi_1$ определяет локально тривиальное расслоение. Отрезок J является деформационным ретрактом плоскости $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(J)$ является деформационным ретрактом пространства $V_\varepsilon(f \oplus g)$ и поэтому гомотопически эквивалентно ему. При этом $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(t))$ при $t \in (0, 1)$ диффеоморфно произведению $V_{\varepsilon_1}(f) \times V_{\varepsilon_2}(g)$ неособых многообразий уровня особенностей f и g . Пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(0))$ диффеоморфно $f^{-1}(\varepsilon) \times g^{-1}(0)$. Пространство $g^{-1}(0)$ стягивается в точку. Поэтому $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(0))$ стягивается на пространство, диффеоморфное неособому многообразию уровня $V_\varepsilon(f)$. Точно так же пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(1)) = f^{-1}(0) \times g^{-1}(\varepsilon)$ стягивается на пространство, диффеоморфное неособому многообразию уровня $V_\varepsilon(g)$. Такое описание слоев отображения $(f \circ \pi_1): (f \circ \pi_1)^{-1}(J) \rightarrow J$ над точками отрезка J совпадает с описанием прообразов точек $t \in I = [0, 1]$

при проекции $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \rightarrow I$ (см. определение джойна). Поэтому пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(J)$ гомотопически эквивалентно джойну $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$. Немного более аккуратные рассуждения позволяют превратить это объяснение в доказательство.

В дальнейшем мы будем отождествлять группу гомологий $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ неособого многообразия уровня особенности $f \oplus g$ с тензорным произведением групп $H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$ и $H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$. Это отождествление определяет также отождествление относительной группы гомологий $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g), \partial V_\varepsilon(f \oplus g))$ (являющейся двойственной к группе $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$) с тензорным произведением групп $H_{n-1}(V_\varepsilon(f), \partial V_\varepsilon(f))$ и $H_{m-1}(V_\varepsilon(g), \partial V_\varepsilon(g))$.

Теорема 10 (П. Делинь, см. [147]).

$$\text{Var}_{f \oplus g} = (-1)^{nm} \text{Var}_f \otimes \text{Var}_g.$$

Для доказательства достаточно показать, что для любых классов гомологий $a_1, a_2 \in H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$, $b_1, b_2 \in H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$ имеет место равенство

$$([\text{Var}_{f \oplus g}^{-1}(a_1 \otimes b_1)] \circ [a_2 \otimes b_2]) = (-1)^{nm} (\text{Var}_f^{-1} a_1 \circ a_2) \cdot (\text{Var}_g^{-1} b_1 \circ b_2).$$

Мы не будем подробно проводить это доказательство, а только наметим основные его шаги (впрочем, восстановить его целиком не представляет труда).

Пусть $H_t(f)$ — семейство отображений $V_\varepsilon(f) \rightarrow V_{(1-t)\varepsilon}(f) = f^{-1}((1-t)\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$, описанное в лемме 10 (для определенности мы считаем, что $u(t) = (1-t)\varepsilon$). Как уже говорилось, семейство $H_t(f)$ определяет вложение конуса над многообразием уровня $V_\varepsilon(f)$ в пространство $\mathbb{C}^n$. Пусть A_1 — конус над циклом a_1 , определенный семейством $H_t(f)$. A_1 является n -мерной цепью, граница которой лежит в неособом многообразии уровня $V_\varepsilon(f)$ и совпадает с циклом a_1 . Пусть $\Gamma_t(f): V_\varepsilon(f) \rightarrow V_{\exp(2\pi it)\varepsilon}(f)$ — семейство отображений, получаемое поднятием гомотопии $\varepsilon \mapsto \exp(2\pi it)\varepsilon$ ($0 \leq t \leq 1$), $\tilde{a}_2 = \Gamma_{1/2}(f)(a_2)$ — $(n-1)$ -мерный цикл в многообразии уровня $V_{-\varepsilon}(f)$. Пусть $\tilde{A}_2$ — конус над циклом $\tilde{a}_2$, аналогичный построенному выше. Из рассуждений п. 2.3 выводится, что $(\text{Var}_f^{-1} a_1 \circ a_2) = (-1)^n (A_1 \circ \tilde{A}_2)$, причем цепи A_1 и $\tilde{A}_2$ пересекаются только в нуле. Точно так же определяются цепи B_1 и $\tilde{B}_2$, причем $(\text{Var}_g^{-1} b_1 \circ b_2) = (-1)^m (B_1 \circ \tilde{B}_2)$.

Чтобы определить таким же способом $([\text{Var}_{f \oplus g}^{-1}(a_1 \otimes b_1)] \circ [a_2 \otimes b_2])$, надо построить конусы C_1 и $\tilde{C}_2$ над циклами $a_1 \otimes b_1$ и $a_2 \otimes b_2 = \Gamma_{1/2}(f \oplus g)(a_2 \otimes b_2)$. Нетрудно видеть, что в качестве C_1 можно взять $(A_1 \times B_1) \cap \{(x, y): (f(x) + g(y))/\varepsilon \leq 1\}$. Аналогичное утверждение имеет место и для $\tilde{C}_2$. В качестве него можно взять $\tilde{A}_2 \times \tilde{B}_2 \cap \{(x, y): (f(x) + g(y))/(-\varepsilon) \leq 1\}$. (Здесь надо воспользоваться тем, что $\Gamma_t(f \oplus g)(a_2 \otimes b_2) = \Gamma_t(f)(a_2) \otimes \Gamma_t(g)(b_2)$.)

Отсюда $([\text{Var}_{f \oplus g}^{-1}(a_1 \otimes b_1)] \circ [a_2 \otimes b_2]) = (-1)^{n+m} (C_1 \circ \bar{C}_2) = (-1)^{n+m} \times$
 $\times ([A_1 \times B_1] \circ [\bar{A}_2 \times \bar{B}_2]) = (-1)^{n+m+nm} (A_1 \circ \bar{A}_2) (B_1 \circ \bar{B}_2) = (-1)^{nm} \times$
 $\times (\text{Var}_f^{-1} a_1 \circ a_2) \times (\text{Var}_g^{-1} b_1 \circ b_2)$, что и требовалось.

Пусть $\{\Delta_i\}$ ($i=1, \dots, \mu(f)$) — отмеченный базис в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$ гомологий неособого многообразия уровня особенности f , $\{\Delta'_j\}$ ($j=1, \dots, \mu(g)$) — отмеченный базис в группе $H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$. Из теоремы 9 следует, что элементы $\tilde{\Delta}_{ij} = j_*(\Delta_i \otimes \Delta'_j)$ образуют базис в группе $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ гомологий неособого многообразия уровня особенности $f \oplus g$. Матрица пересечений S особенности $f \oplus g$ в этом базисе может быть получена с помощью теоремы 10 из формулы $S = -L + (-1)^{n+m} L^T$, где L — матрица оператора $\text{Var}_{f \oplus g}^{-1}$ (или формы Зейферта). Из нее вытекает

Теорема 11. Индексы пересечений циклов $\tilde{\Delta}_{ij}$ даются следующими формулами:

$$(\tilde{\Delta}_{ij_1} \circ \tilde{\Delta}_{ij_2}) = \text{sgn}(j_2 - j_1)^n (-1)^{nm + \frac{n(n-1)}{2}} (\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2})$$

при $j_1 \neq j_2$,

$$(\tilde{\Delta}_{i_1j} \circ \tilde{\Delta}_{i_2j}) = \text{sgn}(i_2 - i_1)^m (-1)^{nm + \frac{m(m-1)}{2}} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2})$$

при $i_1 \neq i_2$,

$$(\tilde{\Delta}_{i_1j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2j_2}) = 0 \text{ при } (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0,$$

$$(\tilde{\Delta}_{i_1j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2j_2}) = \text{sgn}(i_2 - i_1) (-1)^{nm} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2}) (\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2})$$

при $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0$.

Этот результат получен А. М. Габриэловым в [36]. Кроме того, там доказано следующее утверждение.

Теорема 12. Циклы $\tilde{\Delta}_{ij}$ являются исчезающими и образуют отмеченный базис в группе $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ гомологий неособого многообразия уровня особенности $f \oplus g$. При этом подразумевается, что они упорядочены лексикографически, т. е. цикл $\tilde{\Delta}_{i_1j_1}$ предшествует циклу $\tilde{\Delta}_{i_2j_2}$, если $i_1 < i_2$ или $i_1 = i_2$, $j_1 < j_2$.

Теорема 10 является обобщением уже упоминавшегося результата М. Себастьяни и Р. Тома ([215]), описывающего оператор классической монодромии $h_*(f \oplus g)$ особенности $f \oplus g$.

Теорема 13. $h_*(f \oplus g) = h_* f \otimes h_* g$.

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 10 и соотношения $h_* = (-1)^n \text{Var}(\text{Var}^{-1})^T$ (теорема 5 п. 2.3). Наоборот, теорема 10 — следствие теорем 13, 12, соотношения $h_* = (-1)^n \text{Var}(\text{Var}^{-1})^T$ и теоремы 7 (п. 2.5), утверждающей, что матрица оператора классической монодромии особенности в отмеченном базисе определяет матрицу ее оператора вариации.

Теоремы 11 и 12 дают следующее описание диаграммы Дынкина особенности $f \oplus g$ (определение см. в следующем пункте).

Множество ее вершин совпадает с прямым произведением множеств вершин диаграмм, соответствующих особенностям f и g . Две вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) соединены между собой:

1) ребром той же кратности, что и вершины j_1 и j_2 во второй диаграмме, если $i_1 = i_2$;

2) ребром той же кратности, что и вершины i_1 и i_2 в первой диаграмме, если $j_1 = j_2$;

3) ребром кратностей, равной взятому со знаком минус произведению кратности ребер, соединяющих вершины i_1 и i_2 в первой диаграмме и j_1 и j_2 — во второй диаграмме, если $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0$.

Если $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0$, то вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) не соединены между собой.

2.8. Стабилизация особенностей. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку.

Определение. Росток функции $f(x) + \sum_{j=1}^m y_j^2$ $((\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0))$ называется *стабилизацией* ростка f .

Кратность особенности совпадает с кратностью ее стабилизации. Действительно, если $\tilde{f}$ — шевеление особенности f , рассыпающее ее нулевую критическую точку на μ невырожденных, то

$\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^m y_j^2$ — шевеление ее стабилизации, обладающее тем же

свойством. При этом функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^m y_j^2$ имеют одинаковые множества критических значений. Связь матрицы пересечений особенности с матрицей пересечений ее стабилизации дается следующей теоремой, которая является частным случаем теоремы 11.

Теорема 14. Пусть $\{\Delta_i\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня особенности $f(x)$. Существует такой отмеченный базис $\{\tilde{\Delta}_i\}$ особенности $f(x) + \sum_{j=1}^m y_j^2$, что матрица пересечений его элементов определяется соотношением

$$(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j) = [\operatorname{sgn}(j-i)]^m (-1)^{nm + \frac{m(m-1)}{2}} (\Delta_i \circ \Delta_j).$$

При этом отмеченные базисы $\{\Delta_i\}$ и $\{\tilde{\Delta}_i\}$ соответствуют одинаковым наборам путей, соединяющих критические значения шевелений $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^m y_j^2$ с некритическим значением.

Из теоремы 14 следует, что матрицы пересечений стабилизаций особенности определяют друг друга. Кроме того, при $m \equiv 0 \pmod{4}$ индексы пересечений $(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j)$ и $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ для всех i и j совпадают, а при $m \equiv 2 \pmod{4}$ — отличаются знаком. Таким образом,

с каждой особенностью связаны две симметрические и две косо-симметрические билинейные формы (формы пересечений ее стабилизаций). При этом симметрические (и кососимметрические) формы отличаются только знаком. С каждой особенностью связаны также две группы преобразований целочисленной решетки Z^u (группы монодромии ее стабилизаций). Оператор классической монодромии особенности $f(x)$ совпадает с оператором классической монодромии

ее стабилизации $f(x) + \sum_{j=1}^m y_j^2$ при четном m и отличается от него знаком при нечетном.

Теорема 14 позволяет при формулировке результатов о матрице пересечений особенностей ограничиваться случаем размерностей, имеющих фиксированный вычет по модулю четыре. В большинстве случаев удобно бывает считать, что количество переменных сравнимо с тремя по модулю четыре.

О п р е д е л е н и е. *Квадратичной формой особенности* называется квадратичная форма, определенная индексом пересечения в гомологиях неособого многообразия уровня ее стабилизации с количеством переменных $N \equiv 3 \pmod{4}$.

Для этой стабилизации индексы самопересечения исчезающих циклов $(\Delta_i \circ \Delta_i)$ равны (-2) , а операторы Пикара—Лефшеца действуют в группе гомологий неособого многообразия уровня по формуле $h_i(a) = a + (a \circ \Delta_i) \Delta_i$. Отсюда видно, что $h_i(\Delta_i) = -\Delta_i$ и что преобразование h_i является отражением в гиперплоскости, ортогональной к вектору Δ_i . Ортогональность понимается в смысле скалярного произведения, определяемого квадратичной формой особенности. Таким образом, соответствующая группа монодромии является группой, порожденной отражениями. Такие группы (или соответствующие квадратичные формы, которые их определяют) удобно описывать с помощью некоторого графа.

О п р е д е л е н и е. *Диаграммой Дынкина (или D-диаграммой)* особенности называется граф, определяемый следующим образом:

1) его вершины находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами Δ_i слабо отмеченного базиса в гомологиях неособого многообразия уровня стабилизации особенности с количеством переменных $N \equiv 3 \pmod{4}$;

2) i -я и j -я вершины графа соединены ребром кратности $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ (ребра отрицательной кратности изображаются пунктирными линиями).

D -диаграмма особенности определяет ее группу монодромии (хотя эффективное описание последней обычно бывает довольно сложной задачей). Если D -диаграмма особенности (с известным количеством переменных) задана в отмеченном базисе и ее вершины перенумерованы в соответствующем порядке, то по ней можно определить билинейную форму особенности, а также ее операторы вариации, классической монодромии,...

2.9. Пример. Рассмотрим особенность $f(x) = x^{k+1}$ (особенность типа A_k по терминологии гл. II ОДО-1). Многообразие уровня V_ε состоит из $(k+1)$ точек — корней степени $(k+1)$ из ε . Кратность этой особенности равна k , группа гомологий $H_0(V_\varepsilon)$ (приведенная по модулю точки) изоморфна Z^k .

Функция $\tilde{f}(x) = x^{k+1} - \lambda x$ ($\lambda \neq 0$) является морсовским шевелением особенности f . Мы будем считать, что λ вещественно и больше нуля. Нулевое многообразие уровня $\tilde{f}^{-1}(0)$ функции $\tilde{f}$ также состоит из $(k+1)$ точек: $x_0 = 0$, $x_m = \sqrt[k]{\lambda} \xi_m$ ($m = 1, \dots, k$). Здесь ξ_m — корни k -й степени из единицы, занумерованные в направлении по часовой стрелке: $\xi_m = \exp(-2\pi i m/k)$. Критические точки функции $\tilde{f}$ определяются из уравнения $\tilde{f}'(x) = (k+1)x^k - \lambda = 0$. Поэтому $\tilde{f}$ имеет k критических точек $p_m = \sqrt[k]{\lambda/(k+1)} \xi_m$ с критическими значениями $z_m = -\frac{k}{k+1} \sqrt[k]{\lambda/(k+1)} \xi_m$ ($m = 1, \dots, k$).

Выберем в качестве не критического значения z_0 большое по модулю $\left(|z_0| \geq \frac{k}{k+1} \sqrt[k]{\lambda/(k+1)}\right)$ отрицательное число. Пусть u_m — путь, соединяющий критическое значение z_m функции $\tilde{f}$ с нулем по радиусу ($u_m(t) = (1-t)z_m$, $t \in [0, 1]$), v — путь, идущий от нуля к z_0 по отрицательному лучу вещественной оси и обходящий критическое значение $z_k = -\frac{k}{k+1} \sqrt[k]{\lambda/(k+1)}$ в положительном направлении (против часовой стрелки). См. рис. 22.

Легко видеть, что система путей $\{u_m \cdot v\}$ определяет отмеченный базис исчезающих циклов $\{\Delta_m\}$ в группе гомологий $H_0(\tilde{f}^{-1}(z_0))$ (так как малым шевелением ее можно привести к системе путей, удовлетворяющей определению отмеченного базиса). Для того, чтобы вычислить индексы пересечений $(\Delta_m \circ \Delta_{m'})$ исчезающих циклов в группе гомологий $H_0(\tilde{f}^{-1}(z_0))$, удобно гомотопировать точку z_0 вдоль пути v до нуля. Тем самым мы сведем задачу к вычислению индексов пересечений исчезающих циклов, определенных в группе $H_0(\tilde{f}^{-1}(0))$ системой путей $\{u_m\}$ (эти циклы мы также будем обозначать через Δ_m).

Легко показать, что вдоль пути u_m исчезает цикл $\Delta_m = x_m - x_0$ (т. е. при движении в плоскости значений функции $\tilde{f}$ по пути u_m от нуля к критическому значению z_m точки x_m и x_0 сливаются). Следовательно, имеем $(\Delta_m \circ \Delta_m) = 2$, $(\Delta_m \circ \Delta_{m'}) = 1$ для любых $m \neq m'$. Для стабилизации $f(x) + y_1^2 + y_2^2$ соответствующие формулы имеют вид: $(\Delta_m \circ \Delta_m) = -2$, $(\Delta_m \circ \Delta_{m'}) = -1$ для любых $m \neq m'$.

Мы получим D -диаграмму особенности f следующего вида: k вер-

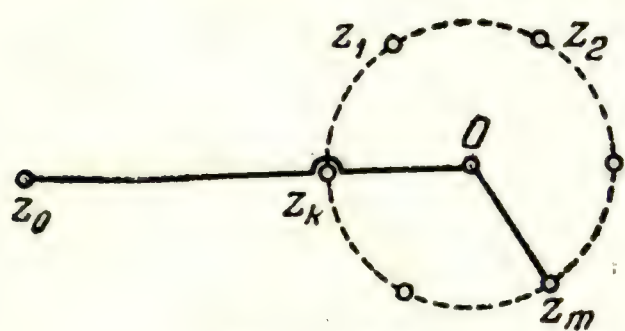


Рис. 22.

шин, каждые две из которых соединены пунктирным отрезком (т. е. ребром кратности (-1)).

Упростим эту диаграмму при помощи операций замены отмеченного базиса. Операция α_{k-1} ($\Delta'_{k-1} = \Delta_k - \Delta_{k-1}$, $\Delta'_k = \Delta_{k-1}$) приводит диаграмму к следующему виду: все вершины, кроме $(k-1)$ -й, попарно соединены пунктирными отрезками (ребрами кратности (-1)), $(k-1)$ -я вершина соединена только с k -й отрезком кратности $(+1)$. Операции α_{k-2} ($\Delta''_{k-2} = \Delta'_{k-1}$, $\Delta''_{k-1} = \Delta'_{k-2}$), α_{k-1} , ..., α_1 не меняют вид диаграммы, а сводятся только к перенумерации

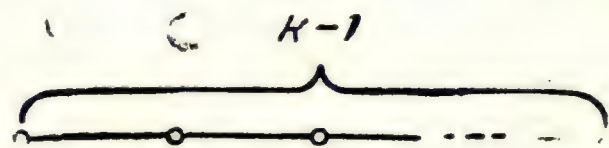


Рис. 23.

вершин. Последовательное применение операций α_{k-1} , α_{k-2} , ..., ..., α_2 , α_{k-1} , ..., α_3 , ..., α_{k-1} , α_{k-2} , α_{k-1} приводит к классической диаграмме Дынкина A_k (рис. 23). Полученный при этом базис исчезающих циклов описывается формулами $\Delta_1^0 = (x_k - x_{k-1})$, $\Delta_2^0 = (x_{k-1} - x_{k-2})$, ..., $\Delta_{k-1}^0 = (x_2 - x_1)$, $\Delta_k^0 = (x_1 - x_0)$.

При движении в плоскости значений функции $\tilde{f}$ по пути v от нуля до не критического значения z_0 точки x_m ($m=0, 1, \dots, k$) перемещаются по комплексной плоскости $\mathbb{C}$, приближаясь к лучам $\arg x = \frac{\pi(2s+1)}{(k+1)}$ (при $z_0 \rightarrow -\infty$). При этом точки x_0 и x_k сближаются по вещественной оси, делают по четверти оборота против часовой стрелки вокруг критической точки p_k и снова расходятся. Легко показать, что на лучах $\arg x = \frac{\pi(2s+1)}{(k+1)}$ (т. е. $x = t \cdot \exp\left(\frac{\pi i(2s+1)}{k+1}\right)$, $t > 0$) функция $\tilde{f}(x) = x^{k+1} - \lambda x$ не принимает отрицательных вещественных значений, кроме случая четного k и $s = k/2$. Действительно, $\tilde{f}(x) = -t^{k+1} - \lambda t \exp\left(\frac{\pi i(2s+1)}{k+1}\right)$, где второе слагаемое вещественно только при четном k и $s = k/2$. В этом случае по лучу $x = -t$ ($t > 0$) движется точка $x_{k/2}$. Отсюда следует, что при движении в плоскости значений функции $\tilde{f}$ по лучу v от нуля к значению z_0 точки x_m приближаются к точкам $\tilde{x}_m = \sqrt[k+1]{-z_0} \exp\left(\frac{-\pi i(2m+1)}{k+1}\right)$ ($m=0, 1, \dots, k$). Если, кроме того, пройти в плоскости значений в отрицательном направлении (по часовой стрелке) от точки z_0 к точке $z'_0 = -z_0$, то точки $\tilde{x}_m$ перейдут в точки

$$\tilde{x}_m = \sqrt[k+1]{-z_0} \exp\left(\frac{-2\pi i(m+1)}{(k+1)}\right) \quad (m=0, 1, \dots, k).$$

Мы приходим к следующему результату:

Теорема 15. На многообразии уровня $V_1 = \{x: x^{k+1} = 1\}$ особенности $\tilde{f}(x) = x^{k+1}$ отмеченный базис образуют исчезающие циклы $\Delta_1 = \zeta_1 - \zeta_2$, $\Delta_2 = \zeta_2 - \zeta_3$, ..., $\Delta_k = \zeta_k - \zeta_{k+1}$, где $\zeta_j = \exp\left(\frac{-2\pi i(j-1)}{k+1}\right)$ — корни $(k+1)$ -й степени из единицы ($j=1, \dots$

..., $(k+1)$). Индексы пересечений этих циклов даются формулами $(\Delta_j \circ \Delta_j) = 2$, $(\Delta_j \circ \Delta_{j+1}) = -1$, $(\Delta_j \circ \Delta_{j'}) = 0$ при $|j - j'| \geq 2$.

Первые вычисления формы пересечения и оператора классической монодромии для функции нескольких переменных были проделаны Ф. Фамом ([94]) для особенности вида $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^{a_k}$

($a_k \geq 2$). Кратность этой особенности равна $\prod_{k=1}^n (a_k - 1)$. Ф. Фам

доказал, что в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня функции f существует такой базис $e_{i_1 \dots i_n}$ ($0 \leq i_k \leq a_k - 2$)

(в обозначениях Ф. Фама $e_{i_1 \dots i_n} = \left(\prod_{k=1}^n \omega_k^{i_k} \right) e$), что

$$(e_{i_1 \dots i_n} \circ e_{i_1 \dots i_n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 + (-1)^{n-1});$$

$$(e_{i_1 \dots i_n} \circ e_{j_1 \dots j_n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\sum_k (j_k - i_k)},$$

если $i_k \leq j_k \leq i_k + 1$ для всех k . В остальных случаях (кроме получающегося из предыдущего перестановкой циклов) $(e_{i_1 \dots i_n} \circ e_{j_1 \dots j_n}) = 0$.

Результат Ф. Фама может быть получен из теоремы 11 (п.2.7).

Применение ее к особенности $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^{a_k}$ дает ту же матрицу пересечений, что и у Ф. Фама, если в качестве отмеченного ба-

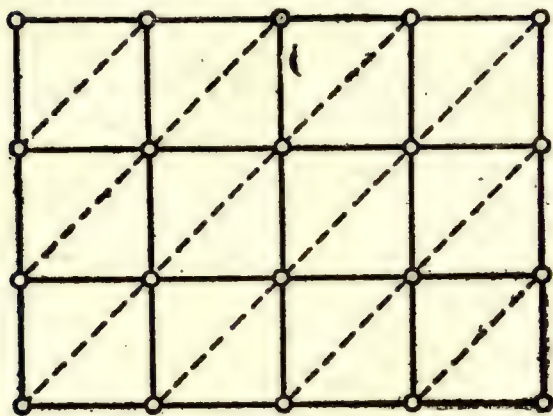


Рис. 24.

зиса особенности $f_k(x_k) = x_k^{a_k}$ использовать базис, описанный в теореме 15. Для особенности $f_k(x_k) = x_k^{a_k}$ положим $\varepsilon = 1$, $u(t) = (1-t)$, $H(t)x_k = \sqrt[a_k]{(1-t)}x_k$. Последовательное применение конструкции, описанной в п. 2.7, к отмеченным базисам особенностей $f_k(x_k)$, даваемым теоремой 15, приводит, как нетрудно убе-

диться, к базису, построенному Ф. Фамом в [94]. Мы получаем следующий результат.

Утверждение. Базис Ф. Фама является отмеченным относительно лексикографического упорядочения его элементов.

Это значит, что D -диаграмма особенности Ф. Фама имеет вид, изображенный на рис. 24 ($n=2$, $a_1=6$, $a_2=5$).

§ 3. Бифуркационные диаграммы и группа монодромии особенности

Характеристики особенности, рассматривавшиеся в § 2 (кратность особенности, ее матрица пересечений, группа монодромии, ...), связаны с такими объектами, как бифуркационные

диаграммы нулей и функций особенности, ее разрешение, ее полярные кривые. Некоторые из этих связей будут изложены в этом параграфе.

3.1. Бифуркационные диаграммы особенности. Для того, чтобы определить бифуркационные диаграммы особенности, напомним определение ее версальной деформации (более подробное изложение см. в ОДО-1, § 8).

О п р е д е л е н и е. Деформацией особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ называется такой росток голоморфной функции $F(x, v)$ ($v \in \mathbb{C}^l$, $F: (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$), что $F(x, 0) = f(x)$.

Пространство $\mathbb{C}^l$ называется пространством параметров или базой деформации F .

О п р е д е л е н и е. Деформация $F(x, v)$ особенности f называется *версальной*, если любая деформация $G(x, \eta)$ ($\eta \in \mathbb{C}^m$) особенности f ($G(x, 0) = f(x)$) «эквивалентна деформации, индуцированной из F », т. е. существует аналитическое отображение $\psi: (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^l, 0)$ пространства параметров и аналитическое семейство $g(x, v)$ ($g: (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $g(\cdot, 0) = \text{id}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$) локальных замен координат такие, что $G(x, v) = F(g(x, v), \psi(v))$.

Размерность l базы $\mathbb{C}^l$ версальной деформации $F(x, v)$ не меньше кратности μ особенности 0 . Существует (и единственна в естественном смысле) версальная деформация особенности f с базой, размерность которой в точности равна μ . Эта деформация называется *миниверсальной*.

Миниверсальная деформация $F(x, v)$ особенности f может быть построена следующим образом. В п. 2.1 указывалось, что факторкольцо кольца $\mathcal{O}$ ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ по идеалу, порожденному частными производными функции f (якобиеву идеалу), как комплексное векторное пространство имеет размерность, равную кратности μ особенности f . Пусть ростки функций $\varphi_i: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($i = 0, 1, \dots, \mu - 1$) порождают базис

этого пространства. Тогда деформация $F(x, v) = f(x) + \sum_{i=0}^{\mu-1} v_i \varphi_i(x)$

является миниверсальной ($v = (v_0, v_1, \dots, v_{\mu-1})$). В качестве φ_0 может быть взят росток функции, тождественно равной единице.

Пусть $F(x, v)$ — миниверсальная деформация особенности f ($v \in \mathbb{C}^\mu$), $W_v = \{x \in \mathbb{C}^n: F(x, v) = 0, \|x\| \leq \rho\}$ — множество нулевого уровня функции $F(\cdot, v)$. Поскольку $F(x, 0) = f(x)$, множество $\{x \in \mathbb{C}^n: f(x) = 0\}$ трансверсально к сфере S_ρ достаточно малого радиуса ρ , то существует такое $\varepsilon > 0$, что при $\|v\| \leq \varepsilon$ множество $\{x \in \mathbb{C}^n: F(x, v) = 0\}$ трансверсально к сфере S_ρ . Отсюда следует, что если множество W_v неособо, то оно диффеоморфно неособому множеству уровня функции f вблизи критической точки. Множество тех значений параметра v , для которых W_v особа, образует множество (комплексной) коразмерности один.

О п р е д е л е н и е. Бифуркационной диаграммой нулей (или

бифуркационной диаграммой множеств) особенности f называется пространство $\Sigma_\varepsilon = \{v \in \mathbb{C}^\mu: \|v\| \leq \varepsilon, 0 \text{ — критическое значение функции } F(\cdot, v) \text{ в шаре } \|x\| \leq \rho\}$.

Примеры. 1) Миниверсальная деформация особенности A_2 ($f(x) = x^3$) может быть выбрана в виде $F(x; \lambda_1, \lambda_2) = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$. Локальное нулевое множество уровня функции $F(\cdot; \lambda_1, \lambda_2)$ не имеет особенностей, если многочлен $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ не имеет кратных корней. Поэтому бифуркационная диаграмма нулей Σ состоит из тех значений $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, для которых многочлен $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ имеет вид $(x-a)^2(x-b)$, где $2a+b=0$. Имеем $\lambda_1 = 2ab + a^2 = -3a^2$, $\lambda_2 = -a^2b = 2a^3$. Следовательно, бифуркационная диаграмма Σ описывается уравнением $\lambda_1^3 + \frac{27}{4}\lambda_2^2 = 0$. Она (точнее, конечно, — ее вещественная часть) изображена на рис. 25.

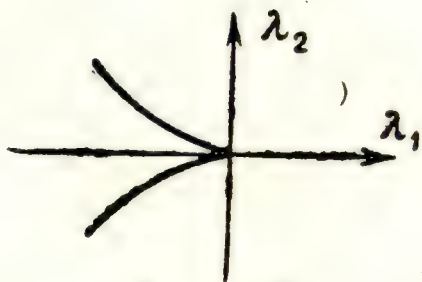


Рис. 25.

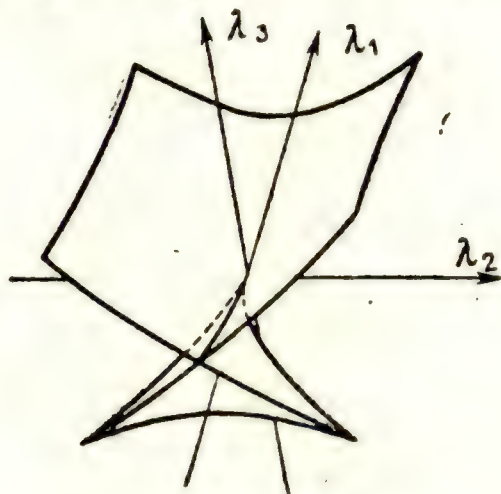


Рис. 26.

корней. Поэтому бифуркационная диаграмма нулей Σ состоит из тех значений $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ для которых многочлен $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$ имеет вид $(x-a)^2(x-b)(x-c)$, где $2a+b+c=0$. Бифуркационная диаграмма Σ носит название «ласточкина хвоста». Она изображена на рис. 26.

Топологический тип пары $(D_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$ ($D_\varepsilon = \{v \in \mathbb{C}^\mu: \|v\| \leq \varepsilon\}$ — шар радиуса ε в базе миниверсальной деформации F) не зависит от ε для достаточно малых ε и не зависит от выбора миниверсальной деформации особенности f . Пространство $(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ (открытое подпространство шара D_ε) является базой локально тривиального расслоения $\{(x, v) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^\mu: \|x\| \leq \rho, \|v\| \leq \varepsilon, v \notin \Sigma_\varepsilon, F(x, v) = 0\} \rightarrow D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ с проекцией $(x, v) \mapsto v$. Слой $W_v = \{x \in \mathbb{C}^n: F(x, v) = 0\}$ этого расслоения диффеоморфен неособому множеству уровня особенности f .

Как во всяком расслоении, фундаментальная группа его базы действует в гомологиях слоя. Таким образом, имеется естественное представление

$$\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) = \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon, v) \rightarrow \text{Aut } H_{n-1}(W_v) = \text{Aut } H_{n-1}(V_\lambda).$$

Теорема 1. *Образ представления $\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \rightarrow \text{Aut } H_{n-1}(V_\lambda)$ фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме нулей особенности f в гомологиях неособого многообразия уровня совпадает с группой монодромии особенности f .*

Для доказательства надо выбрать миниверсальную деформацию $F(x, v)$ особенности f в виде $F_0(x, v') - v_0$, где $v' \in \mathbb{C}^{m-1}$, $v_0 \in \mathbb{C}$, $v = (v_0, v')$. В качестве шевеления $f_\lambda(x)$ особенности f можно взять шевеление вида $F_0(x, v'(\lambda))$. Пусть ρ — естественная проекция базы $\mathbb{C}^m$ миниверсальной деформации в пространство $\mathbb{C}^{m-1}$, переводящая $v = (v_0, v')$ в v' . Если $f_\lambda(x)$ — морсовская функция (λ достаточно мало), то прямая $L = \rho^{-1}(v'(\lambda))$ находится в общем положении с многообразием Σ_ε . Прямая L пересекается с бифуркационной диаграммой Σ_ε в таких точках $(v_0, v'(\lambda)) \in \mathbb{C}^m$, для которых v_0 является критическим значением функции $f_\lambda(x)$. Количество таких точек равно кратности $\mu(f)$ особенности f . Пространство $L \setminus \Sigma_\varepsilon$ совпадает с дополнением к множеству критических значений функции f_λ . Ограничение расслоения $\{(x, v) : v \notin \Sigma_\varepsilon, F(x, v) = 0\} \rightarrow D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$, описанного выше, на $L \setminus \Sigma_\varepsilon$ совпадает с расслоением неособых многообразий уровня функции f_λ над дополнением к множеству ее критических значений. Отсюда следует, что естественное представление $\pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \rightarrow \text{Aut } H_{n-1}(V_\lambda)$, образом которого является группа монодромии особенности f , пропускается через фундаментальную группу дополнения к бифуркационной диаграмме:

$$\pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \rightarrow \text{Aut } H_{n-1}(V_\lambda),$$

где i_* — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный вложением $L \setminus \Sigma_\varepsilon \hookrightarrow D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$. Из того, что прямая L находится в общем положении с многообразием Σ_ε , выводится, что гомоморфизм $i_*: \pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \rightarrow \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ является эпиморфизмом. Отсюда следует, что образ представления $\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \rightarrow \text{Aut } H_{n-1}(V_\lambda)$ совпадает с группой монодромии особенности f .

То, что гомоморфизм $i_*: \pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \rightarrow \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ эпиморфен, является вариантом теоремы Зариского ([239]), состоящей в следующем. Пусть M — неособая аффинная алгебраическая гиперповерхность в пространстве $\mathbb{C}^n$, L — (комплексная) прямая общего положения в пространстве $\mathbb{C}^n$. Такая прямая трансверсально пересекается с гиперповерхностью M в t точках $p_1, \dots, p_t$. Теорема Зариского утверждает, в частности, что для прямой L общего положения гомоморфизм фундаментальных групп $i_*: \pi_1(L \setminus M) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^n - M)$, индуцированный вложением $i: L \setminus M \rightarrow \mathbb{C}^n - M$, является эпиморфизмом. Фундаментальная группа $\pi_1(L \setminus M) = \pi_1(L - \{p_i\})$ прямой с t выколотыми точками является свободной группой, порожденной t образующими. В качестве этих образующих могут быть взяты простые петли, соответствующие системе непересекающихся путей на комплексной прямой L , соединяющих точки p_i с базисной точкой $p_0 \in L \setminus M$. Таким образом,

фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности M является группой, порожденной m описанными образующими.

Теорема Зариского описывает также все соотношения между образующими. Для того, чтобы это сделать, рассмотрим проекцию $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ пространства $\mathbb{C}^n$ вдоль прямой L и ее ограничение $\pi|_M: M \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ на гиперповерхность M . Общность положения прямой L позволяет, в частности, предполагать, что дискриминантное множество отображения $\pi|_M$ (образ множества его критических точек) является приведенной гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$. Более подробно это означает следующее. Замыкание множества критических значений отображения $\pi|_M$ является комплексной гиперповерхностью N в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$. Если $q \in \mathbb{C}^{n-1} - N$, то прообраз $\pi|_M^{-1}(q)$ состоит из m точек, в каждой из которых дифференциал отображения $\pi|_M$ невырожден. Во всех неособых точках гиперповерхности N , за исключением множества коразмерности 1, сливаются две точки прообраза. Около такой точки гиперповерхность M может быть локально задана уравнением $x_0 + x_1^2 = 0$, где проекция π переводит точку $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ в $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, N локально задается в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ уравнением $x_1 = 0$. Пусть $q_0 \in \mathbb{C}^{n-1} - N$ — образ прямой L при проекции π , L_1 — прямая общего положения в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$, проходящая через точку q_0 . Можно предполагать, что прямая L_1 пересекает гиперповерхность N только в неособых точках, в которых сливаются две точки из прообраза $\pi|_M^{-1}(q)$, причем все эти пересечения трансверсальны. В этом случае $\pi^{-1}(L_1)$ является неособой кривой в двумерном комплексном пространстве $\pi^{-1}(L_1) \cap M$, а $\pi|_{\pi^{-1}(L_1) \cap M}: \pi^{-1}(L_1) \cap M \rightarrow L_1$ — m -листным разветвленным накрытием над прямой L_1 . Пусть $q_1, \dots, q_k$ — точки пересечения прямой L_1 с дискриминантным множеством N , τ — произвольная петля в пространстве $L_1 - \{q_1, \dots, q_k\}$ с началом и концом в точке q_0 . Обходу петли τ соответствует гомеоморфизм T_τ пары пространств $(\pi^{-1}(q_0), \pi^{-1}(q_0) \cap M) = (L, L \cap M)$ самой на себя, определенный, конечно, с точностью до изотопии. Этот гомеоморфизм индуцирует преобразование $T_{\tau*}: \pi_1(L \setminus M) \rightarrow \pi_1(L \setminus M)$ фундаментальной группы прямой с m выколотыми точками $L \setminus M$ в себя. Очевидно, что если $a \in \pi_1(L \setminus M)$, то $i_*a = i_*T_{\tau*}a$, где $i_*: \pi_1(L \setminus M) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^n - M)$. Теорема Зариского утверждает, что гомоморфизм $\pi_1(\pi^{-1}(L_1) \setminus M) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^n - M)$, индуцированный вложением, является изоморфизмом, а соотношения описанного вида порождают все соотношения между образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^n - M)$. Естественно, что в качестве образующих системы соотношений могут быть взяты соотношения $i_*a = i_*T_{\tau_i*}a$ для системы $\{\tau_i\}$ простых петель, соответствующих системе непересекающихся путей, соединяющих точки $q_1, \dots, q_k$ с точкой q_0 . Отсюда следует, что группа $\pi_1(\mathbb{C}^n - M)$ является группой с m образующими и mk соотношениями.

Локальный вариант этой теоремы, часть которого мы здесь используем, формулируется аналогичным образом. Его доказательство приведено в [161].

Если γ — петля в дополнении $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме нулей особенности f , то по аналогии с п. 2.1 через h_γ будем обозначать соответствующий автоморфизм группы гомологий неособого многообразия уровня особенности f (h_γ принадлежит группе монодромии особенности f).

Особенности соответствует еще одна бифуркационная диаграмма — бифуркационная диаграмма функций. Для ее определения рассмотрим миниверсальную деформацию $F_0(x, v)$ особенности f в классе функций, равных нулю в точке 0. Такая деформация имеет $(\mu - 1)$ параметр. Будем называть ее *ограниченной миниверсальной деформацией*. В качестве нее можно, например, взять

деформацию $F_0(x, v) = f(x) + \sum_{i=1}^{\mu-1} v_i \varphi_i(x)$, где $v = (v_0, \dots, v_{\mu-1})$,

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\mu-1}$ — ростки, порождающие базис факторкольца кольца ростков в нуле голоморфных функций по якобиеву идеалу $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ особенности f , $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi_i(0) = 0$ при $i \geq 1$ (деформация $F_0(x, v)$ отличается от миниверсальной деформации $F(x, v)$ отсутствием слагаемого $v_0 \cdot 1$, которое не влияет на тип функции).

В маленькой шаровой окрестности D_ε нуля в базе $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации рассмотрим множество тех значений параметров v , при которых функция $F_0(\cdot, v)$ в окрестности B_ρ нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ является морсовской, т. е. имеет только невырожденные критические точки (в количестве μ штук) с различными критическими значениями. Дополнение $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ к нему называется *бифуркационной диаграммой функций* особенности f . Топологический тип пары $(D_\varepsilon, \tilde{\Sigma}_\varepsilon)$, конечно, не зависит от ε для достаточно малых ε . $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ является гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{C}^{\mu-1}$. Она, очевидно, приводима, так как является объединением двух гиперповерхностей. Одна из них — это множество значений параметров v , для которых функция $F_0(\cdot, v)$ имеет вырожденные критические точки, а вторая — множество тех значений v , для которых она имеет критические точки с совпадающими критическими значениями.

Примеры. 1) Бифуркационная диаграмма функций особенности A_2 , очевидно, состоит из одной точки $\lambda = 0$ в базе $\mathbb{C}^1$ ограниченной миниверсальной деформации.

2) Бифуркационная диаграмма функций особенности A_3 состоит из тех значений $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, при которых многочлен $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$ либо имеет вырожденную критическую точку, либо имеет две невырожденные критические точки с одинаковыми критическими значениями. Второе из этих множеств совпадает с $\{\lambda_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Первое может быть описано условием, что многочлен $4x^3 + 2\lambda_1 x + \lambda_2$ (производная многочлена $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$) имеет кратный корень.

Это будет при $\lambda_1^3 + \frac{27}{8} \lambda_2^2 = 0$. Бифуркационная диаграмма функций особенности A_3 изображена на рис. 27.

Имеется естественное отображение (проекция) ρ базы миниверсальной деформации $\mathbb{C}^\mu$ на базу ограниченной миниверсальной деформации $\mathbb{C}^{\mu-1}$. Можно показать, что росток пространства $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$

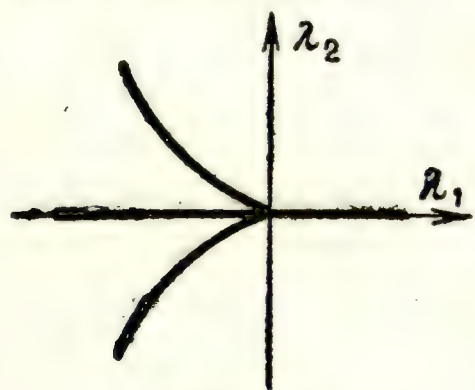


Рис. 27.

совпадает с множеством нерегулярных значений отображения $\Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$, являющегося композицией вложения $\Sigma_\varepsilon \hookrightarrow \mathbb{C}^\mu$ и проекции ρ . Над дополнением к бифуркационной диаграмме функций $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ особенности f это отображение определяет μ -листное накрытие.

3.2. Связность D-диаграммы и «неприводимость» оператора классической монодромии особенности. В п. 3.1 указывалось, что

бифуркационная диаграмма функций особенности всегда приводима (за исключением тривиальных случаев особенностей кратности один и два). В отличие от нее бифуркационная диаграмма нулей особенности неприводима.

Теорема 2 (см., например, [37]). *Бифуркационная диаграмма нулей Σ_ε особенности f является неприводимым аналитическим множеством. Более того, существует росток собственного отображения $(\mathbb{C}^{\mu-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^\mu, 0)$, образ которого совпадает с пространством Σ_ε и которое является изоморфизмом вне множества особых точек Σ_ε .*

Отображение пространства $\mathbb{C}^{\mu-1}$ в базу миниверсальной деформации $\mathbb{C}^\mu$ особенности f , указанное в теореме, может быть построено следующим образом. Рассмотрим множество ростков функций $g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, удовлетворяющих условиям $g(0) = 0, dg(0) = 0$. На нем действует группа ростков аналитических диффеоморфизмов пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющих точку 0. Орбита особенности f под действием этой группы является неособым комплексным многообразием коразмерности $\mu - 1$ (для строгости следует рассматривать все в пространстве струй достаточно высокого порядка). Трансверсаль к орбите в точке f имеет размерность $(\mu - 1)$ и определяет некоторую $(\mu - 1)$ -параметрическую деформацию особенности f . Как всякая деформация особенности f , она эквивалентна деформации, индуцированной из миниверсальной при некотором отображении ее базы $\mathbb{C}^{\mu-1}$ в базу $\mathbb{C}^\mu$ миниверсальной деформации. Поскольку все функции рассматриваемой деформации имеют 0 критическим значением, все пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$ переходит при этом отображении в бифуркационную диаграмму нулей Σ_ε . Это и есть отображение, описанное в теореме 2.

Из этого утверждения А. М. Габриэлов ([37]) и Ф. Лаццери ([174]) вывели следующий результат.

Теорема 3. *D-диаграмма любой особенности в отмеченном базисе связна.*

Это утверждение вытекает из теоремы 4 (см. ниже). Такой же результат имеет место и для слабо отмеченного базиса.

Следствие. Пусть $f_t(x)$ ($t \in [0, t_0]$) — деформация особенности f и пусть для малых t функция $f_t(x)$ имеет в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ k различных критических точек $p_1(t), \dots, p_k(t)$. Предположим, что все критические значения $f_t(p_i(t))$ ($i=1, \dots, k$) функции f_t совпадают. Тогда $k=1$, т. е. функция f_t имеет только одну критическую точку (кратности $\mu(f)$).

Действительно, легко видеть, что если $k > 1$, то исчезающие циклы, соответствующие разным критическим точкам деформации $f_t(x)$ особенности f , будут иметь нулевой индекс пересечения. Поэтому D -диаграмма особенности f распадается на k несвязных компонент, что противоречит теореме 3.

Мы здесь докажем несколько более сильное утверждение, чем теорема 3.

Теорема 4. Группа монодромии особенности транзитивно действует на множестве исчезающих циклов в гомологиях неособого множества уровня вблизи критической точки, т. е. для любых исчезающих циклов Δ_1 и Δ_2 существует элемент из группы монодромии особенности, переводящий Δ_1 в $\pm \Delta_2$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим миниверсальную деформацию особенности f вида $F(x, v) = F_0(x, v') - v_0$, где $v' \in \mathbb{C}^{\mu-1}$, $v_0 \in \mathbb{C}$, $v = (v_0, v')$; в качестве шевеления $\tilde{f}$ особенности f возьмем функцию $\tilde{f} = F_0(x, v')$ с фиксированным значением параметров v' . При этом v' выберем так, чтобы функция $F_0(x, v')$ была морсовской. Это будет выполнено для почти всех значений параметров v' (кроме тех, которые лежат в бифуркационной диаграмме функций особенности). Если L — (комплексная) прямая $\rho^{-1}(v')$ ($\rho: \mathbb{C}^\mu \rightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$ — проекция базы миниверсальной деформации), то пересечение $L \cap \Sigma_\varepsilon$ состоит из точек (z_i, v') ($i=1, \dots, \mu$), где z_i — критические значения функции $\tilde{f}$.

Исчезающий цикл Δ_k ($k=1, 2$) в гомологиях неособого множества уровня $\{\tilde{f}=z_0\}$ определяется путем u_k , соединяющим критическое значение z_{i_k} с некритическим значением z_0 и не проходящим через критические значения функции $\tilde{f}$. При этом для простоты будем считать, что для очень малых t имеем $u_k(t) = z_{i_k} + t$. Пути u_1 и u_2 можно рассматривать как пути на комплексной прямой $L \subset \mathbb{C}^\mu$. Из неприводимости бифуркационной диаграммы Σ_ε вытекает связность множества неособых точек пространства Σ_ε . Те (неособые) точки пространства Σ_ε , в которых проекция $\rho: \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$ является вырожденной, образуют подмножество (комплексной) коразмерности один. Поэтому их выкидывание из множества неособых точек пространства Σ_ε не нарушает его связности. Отсюда следует, что точки (z_{i_1}, v') и (z_{i_2}, v') можно соединить путем v

$(v(0) = (z_{i_1}, v'), v(1) = (z_{i_2}, v'))$, который будет целиком лежать в множестве неособых точек пространства Σ_ε , в которых оно невырожденно проектируется на пространство $\mathbb{C}^{n-1}$. Рассмотрим петлю ω в дополнении к бифуркационной диаграмме нулей Σ_ε в пространстве $\mathbb{C}^n$ (начинающуюся и заканчивающуюся в точке (z_0, v')), которая определяется следующим образом. Она идет от точки (z_0, v') до точки $(z_{i_1} + t_0, v') = (u_1(t_0), v')$ с достаточно малым t_0 по пути u_1 , затем она идет от точки $(z_{i_1} + t_0, v')$ до точки $(z_{i_2} + t_0, v') = (u_2(t_0), v')$ по пути $v + (t_0, 0)$, идущему параллельно пути v , и, наконец, возвращается в точку (z_0, v') по пути u_2 . Нетрудно видеть, что оператор монодромии $h_{\omega*}$, соответствующий петле ω , переводит исчезающий цикл Δ_1 в исчезающий цикл Δ_2 (может быть — с изменением ориентации), что и требовалось доказать.

Теорема 3 является непосредственным следствием теоремы 4. Действительно, пусть D -диаграмма особенности f в (слабо отмеченном) базисе $\{\Delta_i\}$ является несвязной. Из теоремы Пикара — Лефшеца следует, что операторы Пикара — Лефшеца (и их композиции) при действии на базисный исчезающий цикл переводят его в цикл, являющийся линейной комбинацией базисных исчезающих циклов из той же компоненты связности диаграммы. Поэтому в этом случае не существует оператора из группы монодромии особенности f , переводящего базисный исчезающий цикл в базисный исчезающий цикл из другой компоненты связности диаграммы, что противоречит теореме 4. Из этих рассуждений вытекает, что D -диаграмма особенности является связной также и в случае, если кратности ее ребер рассматриваются по модулю $m > 1$.

Из теоремы 3 можно вывести некоторые свойства оператора классической монодромии особенности. Сформулируем одно утверждение о треугольных матрицах, нужное для этого.

Лемма 1. Пусть A и B — верхние треугольные матрицы размера $\mu \times \mu$ с единицами на диагонали. Предположим, что $A \cdot B^T$ — такая матрица, что на пересечении ее первых k столбцов с последними $(\mu - k)$ строками стоят нули. Тогда тем же свойством обладает и матрица B^T , т. е. матрица B является прямой суммой верхних треугольных матриц размеров $k \times k$ и $(\mu - k) \times (\mu - k)$.

Доказательство не представляет труда.

Теорема 5. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис группы $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня особенности, I — подмножество множества индексов $\{1, \dots, \mu\}$ такое, что линейная оболочка базисных элементов Δ_i с $i \in I$ инвариантна относительно оператора классической монодромии h_* . Тогда или $I = \emptyset$ или $I = \{1, \dots, \mu\}$.

Мы докажем (на первый взгляд) чуть более сильное утверждение, которое в действительности в точности эквивалентно теореме 5.

Пусть $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ — набор исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня особенности f , определяемых системой путей $\{u_i\}$ ($i = 1, \dots, k$), соединяющих часть критических

значений шевеления $\tilde{f}$ особенности f с ее некритическим значением z_0 и не проходящих (при $t \neq 0$) через критические значения функции $\tilde{f}$. Предположим, что пути u_i являются несамопересекающимися и не пересекают друг друга в точках, отличных от их концов, совпадающих с z_0 .

Теорема 6. *Если линейная оболочка исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$ инвариантна относительно оператора классической монодромии особенности, то или $k=0$, или $k=\mu(f)$.*

Доказательство. Будем считать, что циклы $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ (и пути $u_1, \dots, u_k$) занумерованы в порядке, который фиксируется условием 3° определения отмеченного базиса (см. п. 1.2). Легко видеть, что система путей $\{u_i; i=1, \dots, k\}$ может быть дополнена до системы путей $\{u_i; i=1, \dots, k, \dots, \mu\}$, определяющей отмеченный базис $\Delta_1, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_\mu$ в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$. Условие инвариантности линейной оболочки элементов $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ относительно оператора классической монодромии h_* означает, что в матрице H оператора h_* в базисе $\Delta_1, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_\mu$ стоят нули на пересечениях первых k столбцов с последними $(\mu-k)$ строками. Применяя лемму 1 к равенству $H=(-1)^n L^{-1} L^T$ (где L — матрица формы Зейферта особенности), получаем, что матрица L является прямой суммой матриц размеров $k \times k$ и $(\mu-k) \times (\mu-k)$. Следовательно, этим же свойством обладает и матрица пересечений особенности f в отмеченном базисе $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$, равная $-L + (-1)^n L^T$. При $k \neq 0, \mu$ это означает, что D -диаграмма особенности f распадается в несвязное объединение двух диаграмм (с количеством вершин k и $(\mu-k)$), что противоречит теореме 3.

Следствие. *Если оператор классической монодромии особенности является умножением на единицу или на минус единицу, то особенность невырождена, т. е. ее кратность μ равна единице.*

Это утверждение (как гипотеза Себастьяни) было доказано Н.А'Кампо в [116]. Там оно было выведено из следующего результата.

Теорема 7. *След $\text{tr } h_*$ оператора классической монодромии особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ функции n переменных равен $(-1)^{n-1}$.*

3.3. Бифуркационные диаграммы простых особенностей. Известно (см. п. 3.6), что для простых особенностей A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 с нечетным числом переменных группа монодромии совпадает с соответствующей одноименной классической группой Вейля (см. [16]). Эта группа является образом фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме нулей Σ_g особенности. Для простых особенностей пространство Σ_g может быть получено следующим образом.

Пусть $\mathbb{R}^k$ — векторное пространство, на котором канонически действует группа Вейля $W(A_k, D_k$ или E_k соответственно), $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ — его комплексификация. Действие группы W на про-

пространстве $\mathbb{R}^k$ естественным образом продолжается до действия W на комплексификации $\mathbb{C}^k$. Пусть S — объединение нерегулярных орбит действия группы W , т. е. множество точек, на которых действие W не свободно (имеет нетривиальную стационарную подгруппу). Оно совпадает с объединением (комплексных) зеркал, отражения относительно которых принадлежат группе W . Рассмотрим факторпространство $\mathbb{C}^k/W$. Известно ([16]), что оно как аналитическое пространство изоморфно k -мерному линейному комплексному пространству.

Теорема 8 ([241]). Для простых особенностей A_k, D_k, E_k пара $(\mathbb{C}^k/W, S/W)$ изоморфна (в окрестности нуля) паре $(D_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$, где Σ_ε — бифуркационная диаграмма нулей особенности.

Пример. Пусть $f(x) = x^{k+1}$ (особенность A_k). В этом случае группа Вейля W является группой перестановок $(k+1)$ -го элемента. Действие ее на пространстве $\mathbb{C}^k$ определяется следующим образом. Пространство $\mathbb{C}^k$ вкладывается в пространство $\mathbb{C}^{k+1}$ на еди-

ницу большей размерности в виде гиперплоскости $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0$, а дейст-

вие группы W на нем получается сужением ее действия на пространстве $\mathbb{C}^{k+1}$ в виде группы перестановок координат. Изоморфизмом факторпространства $\mathbb{C}^{k+1}/W$ с пространством $\mathbb{C}^{k+1}$ является отображение, переводящее класс точки $(x_1, \dots, x_{k+1})$ в точку $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k+1})$, где $\sigma_i = \sigma_i(x_1, \dots, x_{k+1})$ — i -я элементарная симметрическая функция от переменных $x_1, \dots, x_{k+1}$ ($\sigma_1 = x_1 + \dots + x_{k+1}, \dots, \sigma_{k+1} = x_1 \cdot \dots \cdot x_{k+1}$). То, что это отображение является изоморфизмом комплексных многообразий, следует из основной теоремы о симметрических функциях (любая аналитическая симметрическая функция от $x_1, \dots, x_{k+1}$ может быть единственным способом представлена в виде аналитической функции от симметрических многочленов $\sigma_1, \dots, \sigma_{k+1}$). При этом изоморфизме пространство $\mathbb{C}^k/W$ изоморфно отображается на координатную гиперплоскость $\sigma_1 = 0$. Зеркала (нерегулярные орбиты) определяются условием $x_i = x_j$. Миниверсальная деформация особенности $f(x)$ имеет вид $F(x, t_0, \dots, t_{k-1}) = x^{k+1} + t_{k-1}x^{k-1} + \dots + t_1x + t_0$. При этом $t_i = (-1)^{k+1-i} \sigma_{k+1-i}(x_1, \dots, x_{k+1})$, где $(x_1, \dots, x_{k+1})$ — корни уравнения $F(x, t_0, \dots, t_{k-1}) = 0$, $t_k = x_1 + \dots + x_{k+1} = 0$. Бифуркационная диаграмма нулей состоит из тех значений параметров $t = (t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$, при которых функция $F(\cdot, t)$ имеет критическую точку с критическим значением, равным нулю, т. е. имеет кратный корень $x_i = x_j$. Отсюда видно, что в этом случае определитель — изоморфизм, указанный в теореме 8.

Примерно так же доказывается теорема 8 для других простых особенностей.

Напомним, что пространством типа $K(\pi, 1)$ называется пространство, фундаментальная группа π_1 которого совпадает с группой π , а все последующие гомотопические группы $(\pi_2, \pi_3, \dots)$

тривиальны. Пространство типа $K(\pi, 1)$ является базой главного расслоения с группой π и с гомотопически тривиальным пространством расслоения.

В [15] доказано, что пространство $\mathbb{C}^k/W - S/W$ регулярных орбит действия группы W является пространством типа $K(\pi, 1)$, где π — обобщенная группа кос Брискорна группы Вейля W . Если W — группа Вейля типа A_k , то π — обычная группа кос Артина из $(k+1)$ нитей.

Небольшое отступление. *Группы кос.*

Для того чтобы изложение было более независимым, приведем некоторые определения и результаты из теории кос. Более подробное изложение можно найти в [15].

Наглядно-геометрическое определение косы состоит в том, что косой называется объект, изображенный на рис. 28. Коса состоит из n непересекающихся нитей в пространстве $\mathbb{R}^3$, соединяющих n фиксированных точек на нижнем основании (отрезке) с такими же точками на верхнем основании и идущих монотонно вверх от

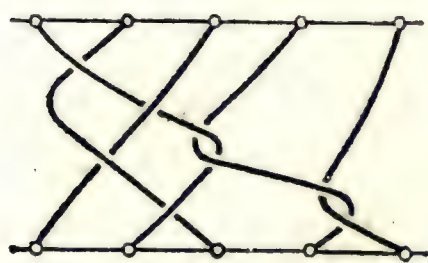


Рис. 28.

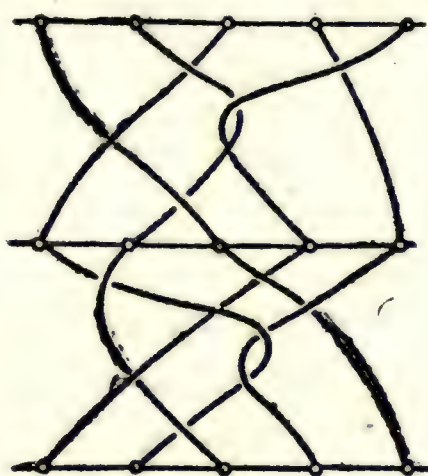


Рис. 29.

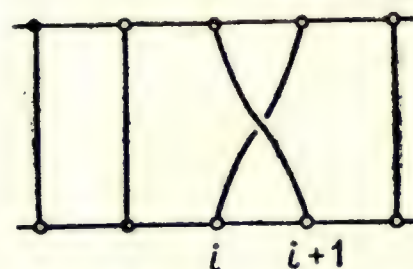


Рис. 30.

нижнего основания до верхнего. Две косы считаются эквивалентными, если их можно продеформировать одна в другую, не нарушая монотонности нитей и не допуская их пересечений друг с другом. Косы можно перемножать, приставляя одну из них к другой (рис. 29). Относительно такого умножения косы из n нитей (точнее, их классы эквивалентности) образуют группу $B(n)$. Единицей этой группы является «незапутанная» коса, состоящая из вертикальных отрезков, соединяющих точки верхнего и нижнего оснований. Коса, обратная к данной, получается из нее отражением в горизонтальной плоскости.

Нетрудно видеть, что группа $B(n)$ кос из n нитей порождена $(n-1)$ -й образующей $g_1, \dots, g_{n-1}$, где g_i — коса, «перепутывающая» i -ю и $(i+1)$ -ю нити (рис. 30). Эти образующие связаны соотношениями $g_i g_j = g_j g_i$ при $|i-j| > 1$, $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$ ($i=1, \dots, (n-2)$). Можно показать, что указанные образующие и соотношения определяют группу $B(n)$. Каждой косе очевидным образом соответствует перестановка n элементов. Поэтому определен естественный эпиморфизм группы кос $B(n)$ на группу $S(n)$ перестановок n элементов. Ядро $\hat{B}(n)$ этого гомоморфизма

называется группой крашенных кос из n нитей. Крашенная коса — это такая коса, каждая нить которой возвращается в ту же точку, из которой она выходит.

Более формальное определение группы кос, проясняющее ее значение для задач анализа, может быть получено следующим образом. Часть пространства $\mathbb{R}^3$, заключенная между горизонтальными плоскостями, содержащими нижнее и верхнее основания, может быть отождествлена с произведением $I \times \mathbb{C}$ отрезка $I = [0, 1]$ и плоскости комплексных чисел $\mathbb{C}$. При таком отождествлении каждому числу $t \in [0, 1]$ коса непрерывным образом соотносит неупорядоченный набор из n различных комплексных чисел. При этом $t = 0$ и $t = 1$ соответствует один и тот же фиксированный набор чисел. Таким образом, группа кос $B(n)$ отождествляется с фундаментальной группой пространства всех неупорядоченных наборов из n различных комплексных чисел. Точно так же группа крашенных кос $\hat{B}(n)$ отождествляется с фундаментальной группой пространства всех упорядоченных наборов из n различных комплексных чисел.

Пусть $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{C}\}$ — пространство упорядоченных наборов из n комплексных чисел, S — объединение всех гиперплоскостей, определяемых уравнениями $x_i = x_j$, $(\mathbb{C}^n - S)$ — пространство упорядоченных наборов из n различных комплексных чисел. Имеем $\hat{B}(n) = \pi_1(\mathbb{C}^n - S)$.

На пространстве $\mathbb{C}^n$ перестановками координат действует группа $S(n)$ перестановок n элементов. Пространство $\mathbb{C}^n/S(n)$ является пространством неупорядоченных наборов из n комплексных чисел. Оно изоморфно n -мерному комплексному векторному пространству. Изоморфизм состоит в сопоставлении неупорядоченному набору комплексных чисел

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n/S(n)$ многочлена $p(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ с корнями

$x_1, \dots, x_n$ (или его коэффициентов, которые с точностью до знаков являются элементарными симметрическими функциями $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ от переменных $x_1, \dots, x_n$: $\sigma_1 = x_1 + \dots + x_n, \dots, \sigma_n = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$). Пространству $\Sigma = S/S(n)$ соответствует множество многочленов с кратными корнями. Таким образом, $(\mathbb{C}^n - S)/S(n) = \mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma$ является пространством неупорядоченных наборов из n различных комплексных чисел; группа кос $B(n)$ совпадает с его фундаментальной группой $\pi_1(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma)$.

Имеет место более сильный результат, утверждающий, что пространство $(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ для группы $B(n)$ кос из n нитей. Это означает, что $\pi_1(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma) = B(n)$, $\pi_k(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma) = 0$ при $k > 1$. Поскольку пространство $\mathbb{C}^n - S$ является $(n!)$ -листным накрытием пространства $(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma)$, утверждение о пространстве $\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma$ эквивалентно утверждению, что пространство $\mathbb{C}^n - S$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ (для группы $\hat{B}(n)$ крашенных кос из n нитей).

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим отображение пространства $\mathbb{C}^n - S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n: x_i \neq x_j\}$ в пространство $\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}: x_i \neq x_j\}$, переводящее точку $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ в $(x_1, \dots, x_{n-1})$. Легко видеть, что это отображение является расслоением со слоем $\mathbb{C} - \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Поскольку слой этого расслоения имеет тривиальные гомотопические группы, начиная со второй, требуемое утверждение доказывается индукцией по размерности n .

Группа $S(n)$ перестановок n элементов является одной из конечных групп, порожденных отражениями. Действие группы $S(n)$ на пространстве $\mathbb{C}^n$ перестановками координат приводимо. Оно распадается в прямую сумму двух действий: действия на подпространстве $\mathbb{C}^{n-1}$, задаваемом уравнением $x_1 + \dots + x_n = 0$, и тривиального действия на одномерном пространстве $x_1 = \dots = x_n$. На подпространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ это действие совпадает с обычным действием группы Вейля типа A_{n-1} , изоморфной группе $S(n)$ перестановок n элементов. Объединение зеркал всех отражений в группе $S(n)$ на пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ (которыми являются гиперплоскости, задаваемые уравнениями $x_i = x_j$) и его факторпространство по действию этой группы мы, как и прежде, будем обозначать через S и Σ (это не должно вызвать путаницы). При этом $\mathbb{C}^n - S = (\mathbb{C}^{n-1} - S) \times \mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma = (\mathbb{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma) \times \mathbb{C}^1$. Поэтому $\hat{B}(n) = \pi_1(\mathbb{C}^n - S) = \pi_1(\mathbb{C}^{n-1} - S)$, $B(n) = \pi_1(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma) = \pi_1(\mathbb{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma)$. Описание группы крашенных кос $\hat{B}(n)$ и группы кос $B(n)$ как фундаментальных групп пространств $\mathbb{C}^{n-1} - S$ и $\mathbb{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma$ соответственно подсказывает обобщение этого определения.

Пусть W — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями, действующая в вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности n . Группа W действует также на его комплексификации $\mathbb{C}^n$. Можно показать, что факторпространство $\mathbb{C}^n/W$ изоморфно комплексному векторному пространству размерности n (см. [16]). Пусть $\{V_i\}$ — множество всех гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{R}^n$, отражения относительно которых принадлежат группе W , $V_i \subset \mathbb{C}^n$ — их комплексификации. Вне подпространства $S = \bigcup_i V_i \subset \mathbb{C}^n$ группа W действует свободно. Пусть $\Sigma = S/W$. Фундаментальная группа $B_W = \pi_1(\mathbb{C}^n/W - \Sigma)$ пространства $\mathbb{C}^n/W - \Sigma$ называется (обобщенной) группой кос Брискорна группы W ; фундаментальная группа $\hat{B}_W = \pi_1(\mathbb{C}^n - S)$ называется (обобщенной) группой крашенных кос Брискорна группы W . Имеет место точная последовательность $1 \rightarrow \hat{B}_W \rightarrow B_W \rightarrow W \rightarrow 1$.

Лемма 2. Пространства $\mathbb{C}^n/W - \Sigma$ и $\mathbb{C}^n - S$ являются пространством типа $K(\pi, 1)$ (для групп B_W и $\hat{B}_W$ соответственно).

Для группы W типа A_{n-1} (группа перестановок n элементов) эта лемма уже доказана. Покажем, как она может быть доказана для групп W типа B_n (изоморфным группам типа C_n) и D_n .

Естественно, что утверждение леммы достаточно доказать только для пространства $\mathbb{C}^n - S$.

Для группы W типа B_n зеркалами отражений, принадлежащих группе W , являются гиперплоскости $\{x_i \pm x_j = 0\}$ и $\{x_i = 0\}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$. Используя индукцию, мы можем считать, что пространство $\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}: x_i \pm x_j \neq 0, x_i \neq 0\}$ является пространством типа $K(\pi, 1)$. Естественная проекция

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n - S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n: x_i \pm x_j \neq 0, x_i \neq 0\} \rightarrow \\ \rightarrow \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}: x_i \pm x_j \neq 0, x_i \neq 0\} \end{aligned}$$

является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{C} - \{0, \pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_{n-1}\}$. Поскольку слой этого расслоения имеет тривиальные гомотопические группы, начиная со второй, отсюда вытекает требуемое утверждение о пространстве $\mathbb{C}^n - S$.

Для группы W типа D_n зеркалами отражений, принадлежащих группе W , являются гиперплоскости $\{x_i \pm x_j = 0\}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n - S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n: x_i \pm x_j \neq 0\} \rightarrow \\ \rightarrow \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}: y_i \neq y_j, y_i \neq 0\}, \end{aligned}$$

задаваемое формулами $y_i = x_n^2 - x_i^2$. Это отображение является локально тривиальным расслоением. Слой его является аффинной комплексной кривой и поэтому имеет тривиальные гомотопические группы, начиная со второй. Точно так же, как для пространства $\mathbb{C}^n - S$, соответствующего группе типа B_n , с помощью рассмотрения проекции $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ доказывается, что база $\{(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}: y_i \neq y_j, y_i \neq 0\}$ этого расслоения является пространством типа $K(\pi, 1)$. Отсюда следует, что и пространство $\mathbb{C}^n - S$ этого расслоения является пространством типа $K(\pi, 1)$.

В общем случае эта лемма вытекает из следующего общего утверждения, принадлежащего Делиню ([144]). Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено конечное число гиперплоскостей V_i . Пусть $V_i \subset \mathbb{C}^n$ — их комплексификации. Предположим, что все компоненты дополнения объединения $\bigcup_i V_i$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ являются открытыми симплицальными конусами (т. е. имеют ровно по n граней). Тогда пространство $\mathbb{C}^n - \left(\bigcup_i V_i\right)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$.

Из теоремы 8 и леммы 2 вытекает

Теорема 9. Для простых особенностей дополнение $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме нулей является пространством типа $K(\pi, 1)$.

О. Ляшко и Э. Лойенга (см. [182]) доказали, что для простых особенностей дополнение $\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме функций также является пространством типа $K(\pi, 1)$, где π — подгруппа индекса $\mu! N^\mu |W|^{-1}$ в группе кос Артина из μ нитей

(здесь $|W|$ — порядок соответствующей группы Вейля, а N — число Кокстера, т. е. на языке особенностей — порядок оператора классической монодромии).

Вложение фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_e)$ дополнения к бифуркационной диаграмме функций простой особенности в группу кос из μ нитей строится следующим образом. Группу кос из μ нитей можно рассматривать как фундаментальную группу пространства многочленов вида $x^\mu + a_{\mu-2}x^{\mu-2} + \dots + a_1x + a_0$, не имеющих кратных корней. В комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1}$ с координатами $(a_0, a_1, \dots, a_{\mu-2})$ точки, соответствующие многочленам с кратными корнями, образуют алгебраическую поверхность Ξ . Дополнение к ней является пространством типа $K(\pi, 1)$, где π — группа кос из μ нитей. Каждой точке v базы $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации особенности f соответствует функция $F(\cdot, v)$ — шевеление особенности f . Если каждое критическое значение считать столько раз, какова его кратность, то в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ эта функция имеет ровно μ критических значений. Бифуркационная диаграмма функций $\tilde{\Sigma}_e$ особенности f выделяется в базе $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации тем условием, что ее точкам соответствуют функции $F(\cdot, v)$, имеющие менее чем μ различных критических значений. Таким образом, при $v \in \tilde{\Sigma}_e$ некоторые критические значения функции $F(\cdot, v)$ совпадают.

Пусть v — точка базы $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации, $F(\cdot, v)$ — соответствующая ей функция, $z_1, \dots, z_\mu$ — ее критические значения в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$

(значения z_i не обязательно все различны), $\bar{z} = \sum_{i=1}^{\mu} z_i / \mu$ — их среднее

арифметическое, $\tilde{z}_i = z_i - \bar{z}$ ($i = 1, \dots, \mu$). Пусть $p_v(x) = \prod_{i=1}^{\mu} (x - \tilde{z}_i)$ —

многочлен степени μ с корнями $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_\mu$. Поскольку

$\sum_{i=1}^{\mu} \tilde{z}_i = 0$, коэффициент при мономе $x^{\mu-1}$ в многочлене $p_v(x)$

равен нулю. Поэтому многочлен $p_v(x)$ принадлежит пространству $\mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1}$ многочленов вида $x^\mu + a_{\mu-2}x^{\mu-2} + \dots + a_1x + a_0$. Ставя в соответствие точке $v \in \mathbb{C}^{\mu-1}$ многочлен $p_v(x) \in \mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1}$, мы получаем отображение $\psi: \mathbb{C}^{\mu-1} \rightarrow \mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1}$ базы ограничений миниверсальной деформации в пространство $\mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1}$. При этом отображение ψ переводит бифуркационную диаграмму функций $\tilde{\Sigma}_e$ в пространство Ξ многочленов с кратными корнями, а дополнение $\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_e$ к бифуркационной диаграмме — в пространство $\mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1} - \Xi$ многочленов, не имеющих кратных корней. Прямыми вычислениями показывается, что на дополнении к бифуркационной диаграмме $\tilde{\Sigma}_e$ отображение ψ является невырожденным, т. е.

имеет ранг, равный $(\mu - 1)$. Прообразом нуля при отображении ψ является множество значений параметров $v \in \mathbb{C}^{\mu-1}$, при которых функция $F(\cdot, v)$ имеет единственное критическое значение. В соответствии со следствием из теоремы 3 отсюда вытекает, что она имеет единственную критическую точку. Таким образом, прообраз нуля при отображении ψ совпадает со стратом $\mu = \text{const}$ в базе ограниченной миниверсальной деформации. Для простых особенностей (и только для них!) этот страт состоит из одной точки $v = 0$. Отсюда следует, что отображение $\psi: \mathbb{C}^{\mu-1} \rightarrow \mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1}$ является собственным в окрестности нуля, а его ограничение на дополнение $\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_e$ к бифуркационной диаграмме функций определяет накрытие над пространством $\mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1} - \Xi$ многочленов без кратных корней. Таким образом, дополнение к бифуркационной диаграмме функций $\tilde{\Sigma}_e$ простой особенности является накрытием над пространством типа $K(\pi, 1)$, откуда следует, что оно само является пространством того же типа. При этом отображение ψ индуцирует вложение фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме $\tilde{\Sigma}_e$ в фундаментальную группу пространства $\mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1} - \Xi$ многочленов без кратных корней, являющуюся группой кос из μ нитей.

Если $p: E \rightarrow B$ — накрытие, то его группой скольжений называется группа $\text{Aut}(p) = \{h: E \rightarrow E: h \text{ — гомеоморфизм, } ph(x) = p(x) \text{ для } x \in E\}$. Нетрудно видеть, что группа $\text{Aut}(p)$ скольжений накрытия p изоморфна факторгруппе $N(\pi_1(E))/\pi_1(E)$, где $N(\pi_1(E))$ — нормализатор подгруппы $\pi_1(E)$ в группе $\pi_1(B)$, т. е. $\{g \in \pi_1(B) \times \times g\pi_1(E)g^{-1} = \pi_1(E)\}$.

Для простых особенностей группа скольжений $\text{Aut}(\psi)$ накрытия $\psi: \mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_e \rightarrow \mathbb{C}_{(a)}^{\mu-1} - \Xi$ дополнения к бифуркационной диаграмме функций над пространством многочленов без кратных корней, построенного выше, описана в [68]. Она является циклической для всех простых особенностей, кроме A_1 и D_4 . Ее порядок равен числу Кокстера соответствующей группы Вейля (или, что то же самое, — порядку оператора классической монодромии) для особенностей типов A_μ ($\mu \neq 1$), D_μ ($\mu \neq 4$) и E_6 , а для особенностей типов E_7 и E_8 — половине числа Кокстера. Для особенности типа D_4 $\text{Aut}(\psi)$ изоморфна $Z_3 \oplus S(3)$, где $S(3)$ — группа перестановок трех элементов; для особенности типа A_1 группа $\text{Aut}(\psi)$ тривиальна.

В вещественном случае, т. е. когда рассматривается вещественная миниверсальная деформация вещественной особенности, Э. Лойенга ([183]) доказал, что дополнение к бифуркационной диаграмме простой особенности имеет стягиваемые компоненты. Эти компоненты взаимно однозначно соответствуют классам W -сопряженных элементов второго порядка в классе смежности W_n , где $n \in N/W$ — некоторый элемент второго порядка, W — соответствующая группа Вейля, N — ее нормализатор в группе всех линейных преобразований. Группа N/W совпадает с группой автоморфизмов соответствующей классической диаграммы Дынкина.

О. В. Ляшко ([70]) описал все распадаения простых особенностей, встречающиеся в базе ее ограниченной миниверсальной деформации. Пусть $f_\lambda(x)$ ($\lambda \in (\mathbb{C}, 0)$) — деформация особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Говорят, что при деформации f_λ особенность f распадается по типу $X = (X_1, \dots, X_k)$, где $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{ij_i})$, если для достаточно близких к нулю (но отличных от него) значений параметра λ функция f_λ имеет (в малой окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$) k различных критических значений $z_1, \dots, z_k$, причем критическое значение z_i достигается в j_i критических точках, в которых функция f_λ имеет особенности типов $X_{i1}, \dots, X_{ij_i}$. Будем говорить, что D -диаграмма E (в отмеченном базисе $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$) распадается по типу $(E_1, \dots, E_k)$, где $E_i = (E_{i1}, \dots, E_{ij_i})$, если:

1° $\{E_i\}$ — разбиение множества вершин диаграммы E на непесекающиеся подмножества, причем вершины каждой из диаграмм E_i (базисные исчезающие циклы) занумерованы в диаграмме E последовательными целыми числами;

2° вершины диаграммы E_i соединены между собой ребрами той же кратности, какой они соединены в диаграмме E ;

3° E_{ij} — компоненты связности диаграммы E_i ($j = 1, \dots, j_i$).

Распадение особенности f по типу $X = (X_1, \dots, X_k)$ ($X_i = (X_{i1}, \dots, X_{ij_i})$) называется согласованным с распадением ее диаграммы E по типу $(E_1, \dots, E_k)$ ($E_i = (E_{i1}, \dots, E_{ij_i})$), если для любого i набор $E_{i1}, \dots, E_{ij_i}$ является набором D -диаграмм критических точек $X_{i1}, \dots, X_{ij_i}$, отвечающих i -му критическому значению. Легко показать, что если особенность f распадается по типу $X = (X_1, \dots, X_k)$, то существует такой отмеченный базис $\{\Delta_p\}$, в котором D -диаграмма E особенности f распадается по типу $(E_1, \dots, E_k)$ согласованно с распадением особенности. О. В. Ляшко доказал, что для простых особенностей имеет место и обратное утверждение: если диаграмма E простой особенности f в некотором отмеченном базисе распадается по типу $(E_1, \dots, E_k)$ ($E_i = (E_{i1}, \dots, E_{ij_i})$), то существует деформация особенности f , при которой она распадается согласованно с распадением диаграммы E .

Более подробное описание всех распадений простых особенностей см. в [70].

3.4. Страт $\mu = \text{const}$ и топологический тип особенности. Деформациями, мало меняющими топологию особенности, должны быть деформации, сохраняющие ее кратность.

Действительно, для количества переменных $n \neq 3$ Ле и Раманужам ([178]) доказали, что при такой деформации не меняется топологический тип особого множества уровня (точнее — пары $(\bar{B}_\rho, f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho)$, где B_ρ — шар достаточно малого радиуса ρ с центром в критической точке) и не меняется дифференцируемый тип

расслоения Милнора. Ограничение $n \neq 3$ происходит из-за того, что при доказательстве используется теорема об h -кобордизме.

Тимуриан ([229]) доказал, что при деформации с постоянной кратностью не меняется и топологический тип функции. Это означает следующее. Пусть $F(x, t)$ — гладкая по $t \in \mathbb{R}^p$ деформация особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($F(x, 0) = f(x)$) такая, что при любом t росток $F(\cdot, t)$ имеет в нуле критическую точку одной и той же кратности $\mu = \mu(f)$ с критическим значением, равным нулю. Тогда существуют окрестности U нуля в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$, U_0 нуля в $\mathbb{C}^n$ и D нуля в $\mathbb{R}^p$ и гомеоморфизм $\alpha: U \rightarrow U_0 \times D$ ($\alpha(0, t) = (0, t)$), делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & U_0 \times D \\ \downarrow F & & \downarrow f \times \text{id} \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{C} \times D \end{array}$$

(здесь π — проекция на первый сомножитель). Для $n = 3$ см. [328].

Легко показать, что вдоль страта $\mu = \text{const}$ не меняются матрица пересечений и группа монодромии особенности.

Однако другие характеристики особенности, имеющие «более аналитический» характер, могут меняться. Так, Ф. Фам показал ([197]), что при деформации с постоянной кратностью может меняться топология бифуркационной диаграммы нулей особенности, а точнее — ее разбиение на части в соответствии с особенностями нулевого множества уровня.

Чтобы построить такой пример, рассмотрим особенность $f(x, y) = y^3 + x^9$, кратность которой равна 16. Ее миниверсальная деформация имеет базу размерности 16 и задается формулой

$$F(x, y, u, v) = y^3 + u(x)y + v(x),$$

где $u(x) = u_0 + u_1x + \dots + u_7x^7$, $v(x) = v_0 + v_1x + \dots + v_7x^7 + x^9$, $u = (u_0, u_1, \dots, u_7)$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_7)$. Пусть $X = F^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{18}$ — нулевое множество уровня деформации F и $G: X \rightarrow \mathbb{C}_{u,v}^{16}$ — ее проекция на базу деформации. Обозначим через $X^{*\alpha}$ (аналитическое) множество точек $z \in X$, в которых кривая $G^{-1}(G(z))$ имеет степень 3 (т. е. локально задается уравнением, принадлежащим кубу максимального идеала) и порядок касания $\geq \alpha$. Нетрудно видеть, что множество $X^{*\alpha}$ состоит из четверок (x, y, u, v) , для которых $y = 0$, x является корнем уравнения $u(x) = 0$ кратности $\geq 2\alpha$ и корнем уравнения $v(x) = 0$ кратности $\geq 3\alpha$. В частности, $X^{**} = X^{*3} = \{(x, y, u, v): x = y = 0, v = 0, u_i = 0 \text{ для } i < 6\}$. Проекция T^{**} множества X^{**} на базу $\mathbb{C}_{u,v}^{16}$ миниверсальной деформации имеет размерность, равную двум, и является стратом $\mu = \text{const}$ в ней.

Рассмотрим множество $T^{*5/3} = G(X^{*5/3})$. Оно состоит из наборов $(u, v) \in \mathbb{C}_{u,v}^{16}$ таких, что полиномы $u(x)$ и $v(x)$ имеют общий корень кратности 4 для $u(x)$ и кратности 5 для $v(x)$. Множество

$G^{-1}(T^{*5/3}) \cap X^{*4/3}$ может быть представлено в виде объединения двух множеств: $X^{*5/3}$ и X' . Здесь X' — это множество таких наборов $(x, y, u, v) \in \mathbb{C}^{18}$, что $y=0$, x является корнем уравнения $u(x)=0$ кратности 3 и уравнения $v(x)=0$ кратности 4 и, кроме того, многочлены $u(x)$ и $v(x)$ имеют другой общий корень кратности 4 для $u(x)$ и 5 для $v(x)$. Пересечение X'' этих двух множеств $X^{*5/3}$ и X' (точнее — его замыкания) состоит из таких наборов $(x, y, u, v) \in \mathbb{C}^{18}$, что $y=0$, x является корнем кратности 7 для уравнения $u(x)=0$ и корнем кратности 9 для уравнения $v(x)=0$. Отсюда следует, что $v=(v_0, \dots, v_7)=0$, $x=0$ и $u_0=\dots=u_6=0$. Таким образом, множество X'' лежит в множестве X^{**} , но не совпадает с ним. Это означает, что множества $X^{*\alpha}$ по-разному подходят к разным точкам множества X^{**} , а это и означает, что бифуркационная диаграмма нулей меняется вдоль страта T^{**} ($\mu = \text{const}$).

Нетрудно видеть, что $X^{*4/3}$ — это множество точек $z \in X$, в которых кривая $G^{-1}(G(z))$ имеет особенность типа E_6 , $X^{*5/3}$ — множество точек $z \in X$, в которых кривая $G^{-1}(G(z))$ имеет особенность типа E_8 . Поэтому $G(X')$ является множеством (точнее — его замыканием) тех значений $(u, v) \in \mathbb{C}_{u,v}^{16}$, для которых кривая $G^{-1}(u, v)$ имеет две особенности типов E_6 и E_8 . Проведенное рассуждение показывает, что страт бифуркационной диаграммы нулей, состоящий из точек, в которых соответствующая функция имеет особенности типов E_6 и E_8 на нулевом множестве уровня, меняется (просто исчезает) вдоль семейства $\mu = \text{const}(T^{**})$ особенности $x^3 + y^9$.

С. М. Гусейн-Заде и Н. Н. Нехорошев ([259]) показали, что при деформации с постоянной кратностью невырожденного однородного многочлена степени 22 от двух переменных меняется наибольшая из кратностей примыкающих особенностей типа A_k .

Имеется недоказанная гипотеза, состоящая в том, что в базе ограниченной миниверсальной деформации особенности страт $\mu = \text{const}$, т. е. множество значений параметров, при которых соответствующая функция имеет критическую точку той же кратности, что и исходная особенность, является неособым многообразием. А. М. Габриэлов доказал ([37]), что размерность этого множества равна модальности особенности.

Гипотеза о гладкости страта $\mu = \text{const}$ в базе ограниченной миниверсальной деформации доказана для случая, когда количество переменных $n=2$. Первым это сделал, по-видимому, Вол (Wahl J., 1971). По этому поводу см. [132]; см. также статью Тесье [225].

3.5. Разрешение особенности и некоторые свойства оператора классической монодромии. Полезным инструментом исследования топологии особенности является ее разрешение.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — особенность, т. е. росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку.

Определение. Разрешением особенности f называется собственное аналитическое отображение $\pi: (Y, Y_0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ неособого комплексного многообразия Y такое, что:

1° отображение $\pi|_{Y-Y_0}$ является аналитическим изоморфизмом $Y-Y_0 \rightarrow \mathbb{C}^n-0$ (или окрестности пространства Y_0 в Y на окрестность нуля в $\mathbb{C}^n$);

2° подпространство $Y_0 = \pi^{-1}(0)$ пространства Y является объединением неособых $(n-1)$ -мерных многообразий (дивизоров) на Y , находящихся в общем положении;

3° в окрестности любой точки из $Y_0 = \pi^{-1}(0)$ существует такая локальная система координат $y_1, \dots, y_n$, в которой $f \circ \pi(y_1, \dots, y_n) = y_1^{k_1} \cdot \dots \cdot y_n^{k_n}$; якобиан отображения π равен $g(y_1, \dots, y_n) y_1^{m_1} \cdot \dots \cdot y_n^{m_n}$, где $g(0, \dots, 0) \neq 0$.

Существование разрешения любой особенности является следствием теоремы Хиронаки ([106]). В случае, когда f — функция двух переменных, ее разрешение может быть построено при помощи нескольких последовательных σ -процессов (см. [115], а также п. 4.3) в особых точках.

Многие топологические характеристики особенности (например, ее кратность, характеристический многочлен оператора классической монодромии и другие) могут быть выражены через топологические характеристики дивизоров, вклеиваемых при разрешении особенности. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, введем некоторые понятия.

Характеристический многочлен $P_f(z)$ (оператора классической монодромии) особенности f — это $\det(z \cdot \text{id} - h_* | H_{n-1}(V_\varepsilon))$ (здесь V_ε — неособое многообразие уровня особенности f). Корнями характеристического многочлена $P_f(z)$ являются собственные значения оператора h_* классической монодромии особенности.

Через характеристический многочлен $P_f(z)$ особенности f выражается также определитель $\det S$ формы пересечений в гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z})$ неособого многообразия уровня особенности f . Он имеет инвариантный смысл, поскольку определитель замены базиса целочисленной решетки $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z})$ равен (± 1) . Определитель формы пересечений совпадает с определителем матрицы оператора $i_*: H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon; \mathbb{Z})$. Если $\det S \neq 0$, то с точностью до знака он равен порядку группы $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon; \mathbb{Z}) / \text{Im } i_*$. Имеем

$$\begin{aligned} \det S &= \det(-\text{Var}^{-1} + (-1)^n (\text{Var}^{-1})^T) = \\ &= \det(-\text{id} + (-1)^n \text{Var} (\text{Var}^{-1})^T) = \det(-\text{id} + h_*) = (-1)^n P_f(1). \end{aligned}$$

Иногда вместо характеристического многочлена особенности удобнее пользоваться так называемой ζ -функцией преобразования h классической монодромии особенности. Во-первых, ответы для нее получаются обычно более красивыми, а, во-вторых, ζ -функция монодромии определена и для неизолированных особенностей, в то время как характеристический многочлен практически теряет

смысл. Многие из следующих ниже утверждений сохраняются и для неизолированных критических точек, но мы не будем это специально оговаривать.

Определение. ζ -функцией преобразования $g: X \rightarrow X$ топологического пространства X (для определенности — конечного клеточного комплекса) называется рациональная функция

$$\zeta_g(z) = \prod_{q \geq 0} \{\det [\text{id} - zg_* | H_q(X; R)]\}^{(-1)^q}.$$

В этом определении учитываются и нульмерные гомологии пространства X , т. е. гомологии не считаются приведенными по модулю точки. Определение имеет смысл и для пары пространств (X, Y) и преобразования $g: X \rightarrow X$, переводящего подпространство Y в себя. В этом случае в формуле для ζ -функции фигурирует действие преобразования g на относительных гомологиях $H_q(X, Y; R)$.

Определение. ζ -функцией монодромии особенности f называется ζ -функция преобразования классической монодромии h неособого многообразия уровня V_ε особенности f в себя.

Для изолированных особенностей имеем $H_q(V_\varepsilon) = 0$ при $q \neq 0, n-1$. Следовательно, $\zeta_f(z) = (1-z)(z^\mu P_f(z^{-1}))^{(-1)^{n-1}}$, откуда $P_f(z) = z^\mu \left(\frac{z}{z-1} \zeta_f(z^{-1}) \right)^{(-1)^{n-1}}$, где μ — кратность особенности. Таким образом, характеристический многочлен $P_f(z)$ и ζ -функция $\zeta_f(z)$ особенности выражаются друг через друга.

Легко видеть, что степень рациональной функции $\zeta_f(z)$ (равная степени числителя минус степень знаменателя) равна эйлеровой характеристике $\chi(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня V_ε .

Следующий результат позволяет выразить ζ -функцию особенности через топологические инварианты дивизоров, вклеиваемых при ее разрешении. Пусть $\pi: (Y, Y_0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ — разрешение особенности f , S_m — множество точек пространства Y_0 , в окрестности которых функция $f \circ \pi$ в некоторой локальной системе координат имеет вид x_1^m (очевидно, что в множества S_m не входят пересечения вклеиваемых дивизоров).

Теорема 10 (Н. А'Кампо [117]).

$$\mu(V_\varepsilon) = \sum_{m \geq 1} m \chi(S_m), \quad \zeta_f(z) = \prod_{m \geq 1} (1 - z^m)^{\chi(S_m)}.$$

Для доказательства пользуются тем свойством, что, если преобразование $h: X \rightarrow X$ сохраняет подпространство Y , то $\zeta_{h_X}(z) = \zeta_{h_Y}(z) \cdot \zeta_{h_{(X,Y)}}(z)$, где $h_X, h_Y, h_{(X,Y)}$ — преобразование h , рассматриваемое на соответствующем пространстве (или паре пространств). Существует отображение $\varphi: V_\varepsilon \rightarrow (f \circ \pi)^{-1}(0)$ (стягивание неособого слоя на особый), при котором точки из S_m имеют по m прообразов, а прообразы пересечений вклеиваемых дивизоров в количестве k штук являются расслоениями $(k-1)$ -мерных торов.

Преобразование классической монодромии h можно считать согласованным с этим отображением в том смысле, что оно сохраняет прообразы при отображении φ точек пространства $(f \circ \pi)^{-1}(0)$, действуя на нем тривиально. При этом над точками из множества S_m преобразование h производит циклическую перестановку прообразов. ζ -функция циклической перестановки m точек равна $(1 - z^m)$. Отсюда следует, что ζ -функция преобразования классической монодромии h , ограниченного на прообраз $\varphi^{-1}(S_m)$ множества S_m , равна $(1 - z^m)\chi(S_m)$. Над точками из пересечений вклеиваемых дивизоров преобразование h представляет собой диффеоморфизмы торов, которые являются сдвигами и поэтому не дают вклада в ζ -функцию.

Идея такой конструкции принадлежит Клеменсу ([137]).

Из формулы для ζ -функции особенности, приведенной в теореме 10, вытекает, что все собственные числа оператора классической монодромии изолированной особенности являются корнями различных степеней из единицы. Поэтому некоторая степень (N) оператора классической монодромии имеет все собственные числа, равные единице. В качестве N можно взять число, которое делится на кратности m всех дивизоров, вклеенных при разрешении. Таким образом, имеет место

Теорема 11. *Оператор $(h_*^N - \text{id})$ является нильпотентным, т. е. $(h_*^N - \text{id})^k = 0$ для некоторого k .*

Эта теорема принадлежит Брискорну ([14]), Кацу ([166]) и ряду других авторов. Ее обобщение на случай ростка аналитической функции на аналитическом пространстве, все множества уровня которой могут иметь особенности, получено в [176].

Из рассмотрения разрешения изолированной особенности можно получить оценку на величину показателя степени k , который, как нетрудно видеть, равен максимальному размеру жордановых клеток у оператора классической монодромии. Для этого надо взять отображение $\mathbb{C}_u \rightarrow \mathbb{C}_z$, переводящее u в $z = u^N$, и рассмотреть над $\mathbb{C}_u$ семейство многообразий, индуцированное из семейства $\{(f \circ \pi)(x) = z\}$ над $\mathbb{C}_z$ при помощи этого отображения. Разрешая слой над нулем, мы получим вклейку, в которой все дивизоры входят с кратностью, равной 1 (т. е. $S_m = \emptyset$ при $m > 1$). Оператор $\tilde{h}_*$ монодромии этого семейства равен h_*^N . Пусть Z_i — часть слоя над нулем, являющаяся объединением всех пересечений вклеиваемых неособых дивизоров по i штук. Имеем $Z_1 = (f \circ \pi)^{-1}(0) \supset \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \dots \supset Z_n \supset Z_{n+1} = \emptyset$. Как и раньше, мы имеем отображение неособого слоя на особый нулевой, которое согласовано с преобразованием монодромии. При этом доказывается, что если a — цикл на неособом слое, который лежит в прообразе множества Z_i , то цикл $\tilde{h}_* a - a$ гомологичен циклу, лежащему в прообразе множества Z_{i+1} . Отсюда следует, что $(\tilde{h}_* - \text{id})^n = 0$, т. е. $(h_*^N - \text{id})^n = 0$. Таким образом, в качестве показателя степени k

в теореме 11 может быть взято количество переменных n , и, следовательно, жордановы клетки оператора классической монодромии h_* имеют размеры не более $n \times n$. Тем самым доказана

Теорема 12. *Размер клеток жордановой нормальной формы оператора h_* классической монодромии особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ функции n переменных не превосходит $n \times n$.*

Например, если f — особенность функции двух переменных, то максимальный размер жордановых клеток ее оператора классической монодромии может быть равен двум. Для особенности $f(x, y) = (x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$ он действительно равен двум. Показать, что оператор классической монодромии особенности f не диагонализируется, можно следующим способом. Квадратичная форма особенности f может быть найдена методами § 4. В п. 4.4 показано, что она имеет следующие индексы инерции: положительный индекс инерции $\mu_+ = 1$, нулевой индекс инерции $\mu_0 = 1$, отрицательный индекс инерции $\mu_- = \mu - 2 = 9$. Из формулы Пикара — Лефшеца вытекает, что собственными векторами оператора h_* классической монодромии особенности, отвечающими собственному значению 1, являются элементы пространства $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, ортогональные в смысле формы пересечений всем исчезающим циклам отмеченного базиса $\{\Delta_i\}$, а, следовательно, и всем элементам пространства $H_{n-1}(V_\varepsilon)$. Таким образом, для особенности функции $\hat{f}(x, y, t) = f(x, y) + t^2$ подпространство векторов $a \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$, удовлетворяющих условию $h_*a = a$, одномерно. Для характеристического многочлена $P_{\hat{f}}(z)$ имеем $P_{\hat{f}}(z) = \det(z \cdot \text{id} - h_*) = \det(z \cdot \text{id} + L^{-1}L^T) = \det(zL + L^T) = \det(zL^T + L) = z^\mu \det(L^T + z^{-1}L) = z^\mu P_{\hat{f}}(z^{-1})$. Следовательно, $P_{\hat{f}}(z)$ является возвратным многочленом степени μ (коэффициенты при мономах z^v и $z^{\mu-v}$ совпадают). Кратность корня возвратного многочлена, равного единице, всегда четна. Поэтому пространство элементов группы гомологий $H_2(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня особенности $\hat{f}(x, y, t)$, присоединенных к собственному значению 1 оператора классической монодромии h_* , имеет четную размерность и, следовательно, не совпадает с пространством собственных векторов с собственным значением 1. В свою очередь оператор классической монодромии особенности $f(x, y)$ получается из оператора классической монодромии особенности $\hat{f}(x, y, t)$ умножением на (-1) и поэтому тоже не диагонализируется (именно — он имеет жорданову клетку размера 2×2 , отвечающую собственному значению (-1)).

Стинбринк ([221]) доказал, что размер клеток жордановой нормальной формы оператора классической монодромии особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, отвечающих собственному значению 1, не превосходит $(n-1) \times (n-1)$. См. также п. 13.2.Д.

Для квазиоднородных особенностей $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ росток f принадлежит своему якобиеву идеалу $J_f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$,

а оператор классической монодромии h_* имеет конечный порядок, т. е. диагонализироваться. Бриансон и Шкода ([131]) доказали, что для произвольных особенностей $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ n переменных n -я степень роста f принадлежит якобиеву идеалу J_f . При этом, как было объяснено выше, размер жордановых клеток оператора классической монодромии h_* не превосходит $n \times n$. Исходя из этих соображений, Шерк ([210]) выдвинул гипотезу, что если k -я степень роста f принадлежит якобиеву идеалу J_f , то размер жордановых клеток оператора классической монодромии особенности f не превосходит $k \times k$. В [211] он доказал эту гипотезу. По этому поводу см. также теорему 19 п. 14.3.Д.

Имеется способ построения разрешения особенности по ее диаграмме Ньютона (так называемое торическое разрешение). Для почти всех функций с данной диаграммой Ньютона он действительно приводит к разрешению особенности. Конструкцию этого разрешения можно найти в [18]. См. также § 8.

Исходя из него и теоремы 10, в [231] получено описание ζ -функции (или характеристического многочлена) оператора классической монодромии особенности по ее диаграмме Ньютона.

Пусть $\Gamma \subset N^n$ — диаграмма Ньютона (N — множество неотрицательных целых чисел). ζ -функцией диаграммы Γ назовем функцию

$\zeta_\Gamma(z) = \prod_{l=1}^n (\zeta^l(z))^{(-1)^{l-1}}$, где полиномы $\zeta^l(z)$ определены ниже (они определяются по пересечениям диаграммы Γ со всеми возможными l -мерными координатными плоскостями в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Если L — l -мерное аффинное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^n$ такое, что $L \cap N^n$ является l -мерной целочисленной решеткой, то условимся считать l -мерный объем параллелепипеда, натянутого на любой базис в $L \cap N^n$, равным единице. Для множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ с числом элементов $\# I = l$ положим $L_I = \{k \in \mathbb{R}^n: k_i = 0 \text{ при } i \notin I\}$. Пусть $\Gamma_j(I)$ ($j = 1, \dots, j(I)$) — все $(l-1)$ -мерные грани полиэдра $L_I \cap \Gamma$ и $L_j(I)$ — $(l-1)$ -мерные аффинные подпространства, в которых они лежат. Факторгруппа решетки $N^n \cap L_I$ по подгруппе, порожденной векторами из $N^n \cap L_j(I)$, является циклической. Ее порядок обозначим через $m_j(I)$. Пусть $V_j(I)$ — $(l-1)$ -мерный объем грани $\Gamma_j(I)$ в пространстве $L_j(I)$. Заметим, что $m_j(I)(l-1)!V_j(I)$ равняется умноженному на $l!$ l -мерному объему конуса над $\Gamma_j(I)$ с вершиной в начале координат.

Положим

$$\zeta^l(z) = \prod_{I: \# I = l} \prod_{j=1}^{j(I)} (1 - z^{m_j(I)})^{(l-1)! V_j(I)}.$$

Теорема 13. Для почти всех функций $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с диаграммой Ньютона Γ ζ -функция оператора классической монодромии особенности f совпадает с ζ -функцией диаграммы Γ .

Условия, выделяющие множество функций, для которых выполнено утверждение теоремы 13, могут быть выражены через коэффициенты, с которыми входят в разложение ростка f мономы, лежащие на диаграмме Ньютона Γ (см. § 8). Вообще говоря, может случиться, что все функции с диаграммой Ньютона Γ имеют неизолированную особенность. Тем не менее теорема 13 остается верной.

Поскольку степень ζ -функции оператора монодромии особенности совпадает с эйлеровой характеристикой ее неособого многообразия уровня, из теоремы 13 следует результат А. Г. Кушниренко ([66]), выражающий кратность особенности через ее диаграмму Ньютона.

3.6. Группы монодромии и отмеченные базисы простых особенностей. Наиболее эффективное описание группы монодромии имеется для простых особенностей, т. е. для особенностей, не имеющих непрерывных модулей (см. ОДО-1, § 15). Как и для любых особенностей, здесь имеются два принципиально разных случая: особенности с нечетным числом переменных и особенности с четным числом переменных. В первом случае операторы Пикара—Лефшеца являются отражениями в гиперплоскостях, ортогональных в смысле формы пересечений соответствующим исчезающим циклам; группа монодромии является группой, порожденной отражениями. Во втором случае описание операторов Пикара—Лефшеца не столь привычно.

Как известно, группа монодромии особенности определяется ее матрицей пересечений в слабо отмеченном базисе. Для простых особенностей имеет место следующее утверждение.

Теорема 14. Для простых особенностей $A_k (x^{k+1} + \sum t_i^2)$, $D_k (x^2y + y^{k-1} + \sum t_i^2)$, $E_6 (x^3 + y^4 + \sum t_i^2)$, $E_7 (x^3 + xy^3 + \sum t_i^2)$, $E_8 (x^3 + y^5 + \sum t_i^2)$ существуют отмеченные базисы исчезающих

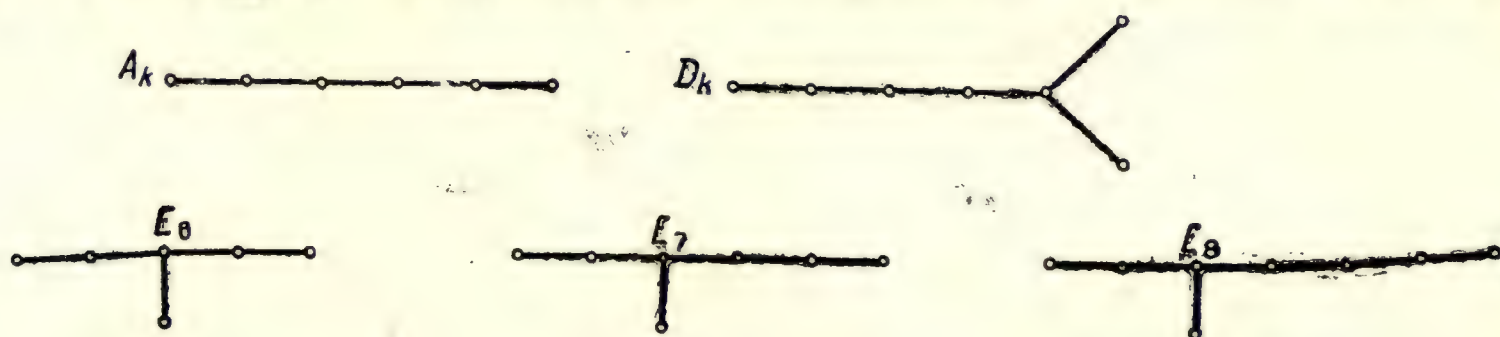


Рис. 31.

циклов, в которых их D -диаграммы совпадают с классическими диаграммами соответствующих одноименных алгебр Ли (рис. 31). Группы монодромии этих особенностей с нечетным числом переменных конечны и изоморфны группам Вейля соответствующих алгебр.

Описание классических групп Вейля см. в [16].

Для особенностей типа A_k теорема 14 доказана в п. 2.9. Для остальных простых особенностей ее доказательство, основанное на том, что эти особенности стабильно эквивалентны особенностям функций двух переменных, будет проведено в п. 4.1.

Способ построения D -диаграмм простых особенностей с нечетным числом переменных непосредственно по самой группе монодромии найден Маккеем ([249]).

Обозначим через $M_f^{(H)}$ и $M_f^{(C)}$ группы монодромии особенностей, стабильно эквивалентных f , с нечетным и четным числом переменных соответственно. Образующими групп $M_f^{(H)}$ и $M_f^{(C)}$ являются преобразования целочисленной решетки, определяемые формулами Пикара—Лефшеца. Эти преобразования совпадают по модулю два. Следовательно, соответствующие группы преобразований гомотопий $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_2)$ неособого многообразия уровня с коэффициентами в группе Z_2 ($H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_2) \approx (Z_2)^\mu$) одинаковы. Поэтому имеется одна группа монодромии $M_f^{Z_2}$ особенности по модулю два, действующая на бинарной решетке $(Z_2)^\mu$. Определены естественные эпиморфизмы $M_f^{(H)} \rightarrow M_f^{Z_2}$ и $M_f^{(C)} \rightarrow M_f^{Z_2}$, индуцированные гомоморфизмом $Z \rightarrow Z_2$. Следовательно, группа $M_f^{Z_2}$ монодромии в гомотопиях с коэффициентами Z_2 является факторгруппой как группы $M_f^{(H)}$, так и группы $M_f^{(C)}$.

Для простых особенностей описание группы $M_f^{Z_2}$ вытекает из того факта, что ядро гомоморфизма $M_f^{(H)} \rightarrow M_f^{Z_2}$ либо тривиально (и в этом случае $M_f^{Z_2} \approx M_f^{(H)}$), либо содержит $\pm$ тождественное преобразование (в этом случае $M_f^{Z_2} \approx M_f^{(H)}/Z_2$). Ядро отображения $M_f^{(H)} \rightarrow M_f^{Z_2}$ совпадает с группой Z_2 тогда и только тогда, когда группа $M_f^{(H)}$ монодромии особенности f с нечетным числом переменных содержит преобразование, являющееся умножением на (-1) .

Для простых особенностей с четным числом переменных группа монодромии $M_f^{(C)}$ описывается следующим результатом.

Теорема 15 (А. Н. Варченко, С. В. Чмутов [113]; см. также [118], [233]). *Для простых особенностей с четным числом переменных группа монодромии совпадает с группой всех линейных операторов g на целочисленной решетке $Z^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$, удовлетворяющих следующим трем условиям:*

1) оператор g сохраняет (кососимметрическую) форму пересечений особенности;

2) ограничение оператора g на ядро формы пересечений (т. е. на множество векторов, ортогональных ко всем элементам решетки Z^μ) является тождественным преобразованием;

3) оператор g , приведенный по модулю два, принадлежит группе $M_f^{Z_2}$ монодромии в гомотопиях с коэффициентами в группе Z_2 .

Необходимость выполнения условий 1)–3) для любых (не обязательно простых) особенностей очевидна. Для особенности f функции двух переменных размерность ядра K формы пересечений равна $r-1$, где r — количество неприводимых компонент у ростка кривой $\{f=0\}$. Поэтому для простых особенностей имеем: $\dim K = 0$ для особенностей A_{2s}, E_6, E_8 ; $\dim K = 1$ для особенностей A_{2s+1}, D_{2s+1}, E_7 ; $\dim K = 2$ для особенностей D_{2s} .

В [114] получено обобщение теоремы 15 на случай произвольных особенностей. По теореме Фробениуса ([74]) в целочисленной ре-

шестке $Z^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$ с кососимметрической формой пересечений на ней можно выбрать (целочисленный) базис $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_l$ ($2n + l = \mu(f)$) такой, что $(e_i \circ f_i) = \lambda_i$, $(e_i \circ f_j) = 0$ при $i \neq j$, $(e_i \circ e_j) = (f_i \circ f_j) = (g_i \circ g_j) = (e_i \circ g_j) = (f_i \circ g_j) = 0$, причем целое число λ_i делит число λ_{i-1} ($i = 2, \dots, n$). Последовательность чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определена однозначно.

Аналогично группе $M_f^{Z_2}$ монодромии в гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_2)$ с коэффициентами в Z_2 можно определить группу $M_f^{Z_k}$ монодромии в гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z_k)$ с коэффициентами в циклической группе Z_k . В следующем утверждении особую роль будет играть случай $k = 2\lambda_1$, где целое число λ_1 определено в предыдущем абзаце.

Теорема 16. *Группа монодромии $M_f^{(u)}$ изолированной особенности функции с четным числом переменных совпадает с группой всех линейных операторов g на целочисленной решетке $Z^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon; Z)$, удовлетворяющих условиям 1) и 2) теоремы 15, а также следующему условию:*

3') оператор g , приведенный по модулю $2\lambda_1$, принадлежит группе $M_f^{Z_{2\lambda_1}}$ монодромии в гомологиях с коэффициентами в $Z_{2\lambda_1}$.

Для всех особенностей функций двух переменных $\lambda_1 = 1$ ([114]).

В п. 3.3 указано, что задача описания всех распадений простой особенности, встречающихся в базе ограниченной миниверсальной деформации, редуцируется к задаче описания всех ее D -диаграмм, в отмеченных базисах. Отсюда естественно возникает задача описания всех отмеченных базисов особенности.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — произвольный росток функции, имеющий изолированную критическую точку в нуле, $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис исчезающих циклов в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z) \approx Z^\mu$ неособого многообразия уровня. В таком базисе оператор вариации Var_f особенности f записывается верхней треугольной матрицей (п. 2.5). Оператор h_* классической монодромии особенности f является произведением $h_1 \circ \dots \circ h_\mu$ операторов

Пикара — Лефшеца h_i ($h_i(a) = a + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i) \Delta_i$), соответствующих исчезающим циклам $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ (там же).

Оказывается, что для простых особенностей имеют место и обратные утверждения.

Теорема 17 ([55]). Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ — базис группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; Z) \approx Z^\mu$ неособого многообразия уровня простой особенности f . Предположим, что в базисе $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ оператор вариации Var_f особенности f записывается верхней треугольной матрицей. Тогда $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис исчезающих циклов.

Теорема 18. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ — базис из исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня простой особенности f . Предположим, что оператор h_* классической монодромии

особенности f является произведением $h_1 \circ \dots \circ h_\mu$ операторов Пикара—Лефшеца, соответствующих исчезающим циклам $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$. Тогда $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис исчезающих циклов.

Доказательство теоремы 18 содержится в письме П. Делиня к Э. Лойенге (1980, не опубликовано). При доказательстве и того, и другого утверждения используется следующий результат, представляющий самостоятельный интерес.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — простая особенность нечетного числа переменных n , $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ — ее малое морсовское шевеление, определенное в окрестности U нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$, $z_1, \dots, z_\mu$ — критические значения функции $\tilde{f}$, z_0 — некритическое значение, причем $|z_i| < |z_0|$ ($i = 1, \dots, \mu$), Δ — произвольный исчезающий цикл в гомологиях неособого множества уровня F_{z_0} функции $\tilde{f}$.

Лемма 3 ([55]). Цикл Δ является исчезающим вдоль некоторого несамопересекающегося пути u , соединяющего некоторое критическое значение z_i функции $\tilde{f}$ с некритическим значением z_0 и лежащего целиком внутри круга $|z| < |z_0|$ (за исключением конца, совпадающего с некритическим значением z_0).

В формулировке этого результата существенными являются условия, что f является функцией нечетного числа переменных, а также что путь u лежит внутри круга $|z| < |z_0|$. В случае, когда f — особенность функции четного числа переменных, утверждение леммы 3 не имеет места. Отказ от требования, чтобы путь u лежал внутри круга $|z| < |z_0|$, делает лемму тривиальной (верной для любых особенностей любого числа переменных) и бессодержательной. Лемма 3 эквивалентна следующему утверждению.

Лемма 4. Существует отмеченный базис исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ в гомологиях неособого многообразия уровня особенности f с первым элементом Δ_1 , совпадающим с исчезающим циклом Δ .

Неизвестно, имеют ли место аналоги теорем 17 и 18 и леммы 3 для непростых особенностей.

3.7. Полярные кривые и матрицы пересечений особенностей. В работе [152] получены результаты, связывающие матрицу пересечений изолированной особенности $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с матрицей пересечений одной из особенностей $f \mp z^2$ или $f|_{z=0}$ и инвариантами полярной кривой особенности f по отношению к линейной функции z . Они позволяют определить матрицы пересечений для большого числа особенностей, а также бывают полезны при доказательствах утверждений о матрицах пересечений особенностей, использующих индукцию по размерности n (такая индукция использовалась, например, в [114] при доказательстве теоремы 16 п. 3.6). Настоящий пункт содержит краткое изложение результатов работы [152]. Полярные кривые особенностей возникают и в других задачах. Более подробное изложение теории полярных кривых можно найти в [226].

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции с изолированной особенностью в нуле, $z: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ — линейная функция. Рассмотрим росток отображения $(f, z): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Множество критических точек этого отображения является ростком аналитического пространства. Обозначим его через $\Gamma_z(f)$. Нетрудно видеть, что $\Gamma_z(f)$ — росток кривой, т. е. $\dim \Gamma_z(f) = 1$. Это, например, следует из того, что критическими точками отображения (f, z) являются критические точки всех функций вида $f - \varepsilon z$ ($\varepsilon \in \mathbb{C}$), а каждая из функций $f - \varepsilon z$ имеет (в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$) конечное множество критических точек.

Определение. Кривая $\Gamma_z(f)$ называется *полярной кривой* особенности f по отношению к линейной функции z .

Другим (эквивалентным) способом описания полярной кривой $\Gamma_z(f)$ является следующий: кривая $\Gamma_z(f)$ состоит из всех точек $x \in \mathbb{C}^n$, в которых касательное пространство к множеству уровня функции f (проходящему через эту точку) параллельно фиксированной гиперплоскости $\{z = 0\}$, т. е. из всех точек $x \in \mathbb{C}^n$, в которых дифференциал df пропорционален дифференциалу dz .

Пусть $\Gamma_z(f) = \bigcup_i \Gamma_i$ — разложение ростка кривой $\Gamma_z(f)$ на неприводимые компоненты. Как было указано, критические точки функции $(f - \varepsilon z)$ лежат на кривой $\Gamma_z(f)$ при всех ε . Пусть μ_i — количество критических точек функции $f - \varepsilon z$ ($\varepsilon \neq 0$), лежащих на компоненте Γ_i (считая с их кратностями). Очевидно, что $\mu(f) = \sum_i \mu_i$.

Критические точки функций $f|_{z=\varepsilon}$ (на гиперплоскостях $\{z = \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^n$) также лежат на полярной кривой $\Gamma_z(f)$. Пусть $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$, ν_i — количество критических точек функции $f|_{z=\varepsilon}$ ($\varepsilon \neq 0$), лежащих на компоненте Γ_i (считая с их кратностями). Если функция $f|_{z=0}$ имеет изолированную критическую точку в нуле, то ни одна из компонент Γ_i не лежит в гиперплоскости $\{z = 0\}$ и $\mu(f|_{z=0}) = \sum_i \nu_i$.

Если $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$, то $f|_{\Gamma_i} \not\equiv 0$. Действительно, если $f|_{\Gamma_i} \equiv 0$, то $df|_{\Gamma_i} = 0$, $dz|_{\Gamma_i} = 0$, $z|_{\Gamma_i} \equiv 0$. На кривой Γ_i функция f может быть разложена в ряд по (дробным) степеням z (это разложение совпадает с разложением Пюизо образа кривой Γ_i при отображении $(f, z): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, см. п. 4.3). Пусть $a_i z^{\alpha_i}$ — первый член этого разложения ($a_i \neq 0$). Имеем $\alpha_i > 1$. Это следует из того, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ корни уравнения $f'_z = \varepsilon$ (определяющего критические точки функции $(f - \varepsilon z)$) должны стремиться к нулю. Если $\Gamma_i \subset \{z = 0\}$ (в этом случае функция $f|_{z=0}$ имеет неизолированную критическую точку), то $f|_{\Gamma_i} \equiv 0$. В этом случае будем считать, что $\alpha_i = 1$.

Лемма 5. Если $\alpha_i > 1$, то $\mu_i = \nu_i (\alpha_i - 1)$.

Доказательство. Если $\alpha_i > 1$, то $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$ и $f = a_i z^{\alpha_i} + \dots$ ($a_i \neq 0$). Предположим, что компонента Γ_i входит в полярную кривую $\Gamma_z(f)$ с кратностью один. Это значит, что критические

точки функции $f - \varepsilon z$ ($\varepsilon \neq 0$), лежащие на компоненте Γ_i , невырождены. В противном случае доказательство должно быть слегка изменено. Запишем разложение Пюизо образа кривой Γ_i при отображении $(f; z): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ в виде $z = z(t) = t^k$, $f = f(t) = a_i t^m + \dots$ (ряд по целым степеням переменной t), где t — униформизирующий параметр. Имеем $\alpha_i = m/k$. Число μ_i равно количеству (ненулевых) корней уравнения $f'_t - \varepsilon z'_t$, обращающихся в нуль при $\varepsilon \rightarrow 0$. Число ν_i равно количеству корней уравнения $z(t) = \varepsilon$. Очевидно, что $\mu_i = m - k$, $\nu_i = k$, откуда $\mu_i/\nu_i = (m - k)/k = \alpha_i - 1$, что и требовалось доказать.

Знание полярной кривой особенности позволяет проследить за поведением критических точек и критических значений при шевелениях специального вида. Например, рассмотрим малое шевеление $F_\varepsilon = f + (z - \varepsilon)^2$ функции $f + z^2$. Критические точки функции F_ε лежат на полярной кривой $\Gamma_z(f)$ особенности f . Рассмотрим те критические точки, которые лежат на компоненте Γ_i и обращаются в нуль при $\varepsilon \rightarrow 0$. Они могут быть определены из уравнения $(F_\varepsilon)'_z|_{\Gamma_i} = 0$. Имеем $a_i \alpha_i z^{\alpha_i - 1} + 2(z - \varepsilon) + o(z^{\alpha_i - 1}) = 0$.

При $\alpha_i > 2$ отсюда следует, что $z = \varepsilon + O(\varepsilon^{\alpha_i - 1})$, $F_\varepsilon = a_i \varepsilon^{\alpha_i} + o(\varepsilon^{\alpha_i})$. Количество таких критических точек равно ν_i .

При $\alpha_i = 2$, $a_i \neq -1$ имеем $z = \varepsilon/(a_i + 1) + o(\varepsilon)$, $F_\varepsilon = \varepsilon^2 a_i/(a_i + 1) + o(\varepsilon^2)$. Количество таких критических точек также равно ν_i .

При $\alpha_i < 2$ в первом приближении имеем $f'_z = 2\varepsilon$, что совпадает с уравнением, определяющим критические точки функции $(f - 2\varepsilon z)$. Количество таких критических точек равно μ_i . Имеем $z = (2\varepsilon/(a_i \alpha_i))^{1/\alpha_i - 1} + \dots = o(\varepsilon)$. Поэтому $F_\varepsilon = \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

Отсюда вытекает

Лемма 6. Если $a_i \neq -1$ при $\alpha_i = 2$, то число Милнора $\mu(f + z^2)$ особенности $f + z^2$ равно $\sum_{i: \alpha_i < 2} \mu_i + \sum_{i: \alpha_i \geq 2} \nu_i$.

Следствие. $\mu(f + z^2) \leq \mu(f|_{z=0})$; $\mu(f + z^2) = \mu(f|_{z=0})$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \geq 2$ для всех i .

Нетрудно показать, что если $f \in m^k$, т. е. если разложение Тейлора ростка f не содержит членов степени $< k$, то при выборе линейной функции z общего положения $\alpha_i \geq k$ для всех i .

Для определения матрицы пересечений особенности f требуется знание матрицы пересечений особенности $(f + z^2)$ в отмеченном базисе специального вида. Опишем этот базис. Пусть A — множество всех различных значений показателей α_i . Из асимптотик критических значений шевеления $F_\varepsilon = f + (z - \varepsilon)^2$ функции $f + z^2$, описанных перед леммой 6, вытекает, что для достаточно малого $\varepsilon \neq 0$ можно выбрать положительные числа r'_α и r''_α для $\alpha = 2$ и для $\alpha \in A$, $\alpha > 2$ так, что $r''_\alpha < r'_\beta$ при $\alpha > \beta$, критические значения функции F_ε в критических точках, принадлежащих компоненте Γ_i с $\alpha_i = \alpha > 2$, содержатся в кольце $\{u: r'_\alpha < |u| < r''_\alpha\}$, а критические значения функции F_ε в критических точках, принадлежащих

компоненте Γ_i с $\alpha_i = \alpha > 2$, содержатся в кольце $\{u: r'_2 < |u| < r''_2\}$. Пусть $\sigma(r)$ — непрерывная монотонная невозрастающая функция такая, что $\sigma(r) = \alpha - 1$ при $r'_\alpha \leq r \leq r''_\alpha$. Положим $V_m = \{u: \arg u + 2\pi\sigma(|u|) \geq \pi(2m-1)\}$, где $m = 1, 2, \dots, -\pi \leq \arg u \leq \pi$. Предположим, что $(-a_i)^{q_i} \notin \mathbb{R}_+$, где $\alpha_i = p_i/q_i$, $(p_i, q_i) = 1$ ($\mathbb{R}_+$ — положительная полуось). В этом случае критические значения функции F_ε не принадлежат ни полуоси $\mathbb{R}_-$, ни границам областей V_m . Рассмотрим систему путей, соединяющих критические значения функции F_ε с некритическим значением 0, которая определяет отмеченный базис исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня особенности $f + z^2$. От этой системы путей потребуем, чтобы все пути пересекали полуось $\mathbb{R}_-$ только в нуле и все пути, проведенные из критических значений функции F_ε , принадлежащих области V_m , содержались бы в V_m . В качестве такой системы путей можно, в частности, выбрать систему отрезков, соединяющих критические значения функции F_ε с нулем. Одним из основных результатов работы [152] является следующая

Теорема 19. Пусть $\{\Delta_j\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов для особенности $f + z^2$, определенный описанной системой путей. Тогда:

1. Существует отмеченный базис исчезающих циклов $\{\Delta_j^m\}$ для особенности f со следующими индексами пересечений:

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^m) = (\Delta_j \circ \Delta_{j'}),$$

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^{m'}) = (m' - m)^{n-1} \text{ при } |m' - m| = 1,$$

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^{m'}) = (-1)^n (\Delta_j \circ \Delta_{j'}) \text{ при } |m' - m| = 1, (m' - m)(j' - j) < 0,$$

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^{m'}) = 0 \text{ при } |m' - m| > 1 \text{ или } (m' - m)(j' - j) > 0.$$

При этом пара (m, j) допустима (т. е. ей соответствует исчезающий цикл Δ_j^m), если и только если цикл Δ_j исчезает вдоль пути, содержащегося в V_m .

2. $\Delta_j^m = h_* \Delta_j^{m-1}$ при $m > 1$, где h_* — оператор классической монодромии особенности f .

3. Условие допустимости пары (m, j) может быть переформулировано следующим образом: для каждого i допустимыми являются первые μ_i пар из (m, j) , где цикл Δ_j исчезает в критической точке, принадлежащей компоненте Γ_i полярной кривой $\Gamma_z(f)$.

Аналогичная связь существует между матрицами пересечений особенностей f и $f|_{z=0}$ в случае, если $f|_{z=0}$ имеет изолированную особенность. Функция $G_\varepsilon = f|_{z=\varepsilon}$ является малым шевелением особенности $f|_{z=0}$. Критические значения функции G_ε в критических точках, принадлежащих компоненте Γ_i , равны $a_i \varepsilon^{\alpha_i} + o(\varepsilon^{\alpha_i})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, для достаточно малого ε можно выбрать положительные числа r'_α и r''_α для всех $\alpha \in A$ так, что $r'_\alpha < r''_\alpha$ для

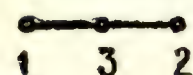
всех $\alpha \in A$, $r''_\alpha < r'_\beta$ при $\alpha > \beta$ и критические значения функции G_ε в критических точках, принадлежащих кривой Γ_i с $\alpha_i = \alpha$, содержатся в кольце $\{u: r'_\alpha < |u| < r''_\alpha\}$. Определим функцию $\sigma(r)$, области V_m и систему путей, соединяющих критические значения функции G_ε с некритическим значением 0 точно так же, как для функции F_ε , с той лишь разницей, что в рассмотрение включаются все $\alpha \in A$, а не только $\alpha \geq 2$. Пусть $\{\tilde{\Delta}'_j\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов для особенности $f|_{z=0}$, определяемый такой системой путей, $\{\tilde{\Delta}_j\}$ — соответствующий отмеченный базис исчезающих циклов (определяемый той же системой путей) для особенности $f|_{z=0} + z^2$, стабильно эквивалентной особенности $f|_{z=0}$. Связь матриц пересечений особенностей $f|_{z=0}$ и $f|_{z=0} + z^2$ в отмеченных базисах $\{\tilde{\Delta}'_j\}$ и $\{\tilde{\Delta}_j\}$ соответственно дается теоремой 14 п. 2.8.

Теорема 20. *Предположим, что росток $f|_{z=0}$ имеет изолированную особенность в нуле. В этом случае в теореме 19 особенность $f + z^2$ и отмеченный базис исчезающих циклов $\{\Delta_j\}$ могут быть заменены на $f|_{z=0} + z^2$ и $\{\tilde{\Delta}_j\}$ соответственно.*

Теорема 20 сводит задачу о вычислении матрицы пересечений особенности f функции n переменных к задаче о вычислении матрицы пересечений особенности $f|_{z=0}$ функции $(n-1)$ переменной в отмеченном базисе специального вида и показателей α_i для компонент Γ_i полярной кривой $\Gamma_z(f)$. Результаты вычислений для большинства особенностей, расклассифицированных в § 15 ОДО-1, сведены в таблице, приведенной ниже. Здесь матрица пересечений особенности $f|_{z=0}$ в отмеченном базисе $\{\tilde{\Delta}'_j\}$, а, следовательно, и особенности $f|_{z=0} + z^2$ в отмеченном базисе $\{\tilde{\Delta}_j\}$, определена одной из следующих $\bar{D}$ -диаграмм:



для особенности f из серий J и E ;



для особенности f из серий X , Y , Z и W ;



для особенности f из серий Q , S , T и U .

В последнем столбце таблицы приведены числа $M_1, \dots, M_{\mu'}$ ($\mu' = \mu(f|_{z=0})$), где натуральное число M_j определяется тем, что в отмеченном базисе $\{\tilde{\Delta}_j^m\}$ особенности f присутствуют циклы $\tilde{\Delta}_j^m$ с $1 \leq m \leq M_j$:

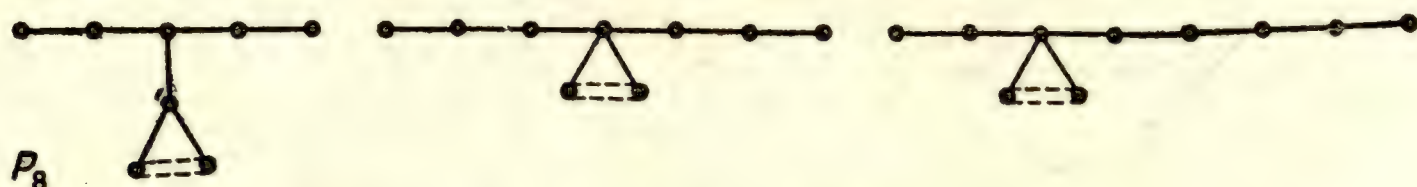
Особенность	$M_1, \dots, M_{\mu'}$
$J_{k,i}$ E_{6k} E_{6k+1} E_{6k+2}	$3k+i-1, 3k-1$ $3k, 3k$ $3k+1, 3k$ $3k+1, 3k+1$
$X_{k,p}$ $Y_{r,s}^k$ $Z_{i,p}^k$ $Z_{12k+6i-1}^k$ Z_{12k+6i}^k $Z_{12k+6i+1}^k$ W_{12k} W_{12k+1} $W_{k,i}$ $W_{k,2q-1}^\#$ $W_{k,2q}^\#$ W_{12k+5} W_{12k+6}	$4k-1, 4k-1, 4k+p-1$ $4k+r-1, 4k+s-1, 4k-1$ $4k-1, 4k+3i-p-1, 4k+3i-1$ $4k+3i, 4k-1, 4k+3i$ $4k+3i+1, 4k-1, 4k+3i$ $4k+3i+1, 4k-1, 4k+3i+1$ $4k, 4k, 4k$ $4k+1, 4k, 4k$ $4k+1, 4k+1, 4k+i+1$ $4k+q+1, 4k+q, 4k+1$ $4k+q+1, 4k+q+1, 4k+1$ $4k+2, 4k+1, 4k+2$ $4k+2, 4k+2, 4k+2$
$Q_{k,i}$ Q_{6k+4} Q_{6k+5} Q_{6k+6} S_{12k-1} S_{12k} $S_{k,i}$ $S_{k,2q-1}^\#$ $S_{k,2q}^\#$ S_{12k+4} S_{12k+5} $T_{p,q,r}$ U_{12k} $U_{k,2q-1}$ $U_{k,2q} (q > 0)$ U_{12k+4}	$2, 2, 3k-1, 3k+i-1$ $2, 2, 3k, 3k$ $2, 2, 3k+1, 3k$ $2, 2, 3k+1, 3k+1$ $2, 4k-1, 4k-1, 4k-1$ $2, 4k, 4k-1, 4k-1$ $2, 4k, 4k, 4k+i$ $2, 4k+q, 4k+q-1, 4k$ $2, 4k+q, 4k+q, 4k$ $2, 4k+1, 4k, 4k+1$ $2, 4k+1, 4k+1, 4k+1$ $p-1, q-1, r-1, 2$ $3k, 3k, 3k, 3k$ $3k+q, 3k+q, 3k, 3k+1$ $3k+q+1, 3k+q, 3k, 3k+1$ $3k+1, 3k+1, 3k+1, 3k+1$

Для особенностей коранга 2 (т. е. для особенностей из серий J , E , X , Y , Z и W) аналогичные диаграммы могут быть легко получены методами § 4.

3.8. Формы пересечений унимодальных и бимодальных особенностей. В § 15 ОДО-1 приведена классификация унимодальных и бимодальных особенностей функций. Здесь мы приведем результаты об их квадратичных формах.

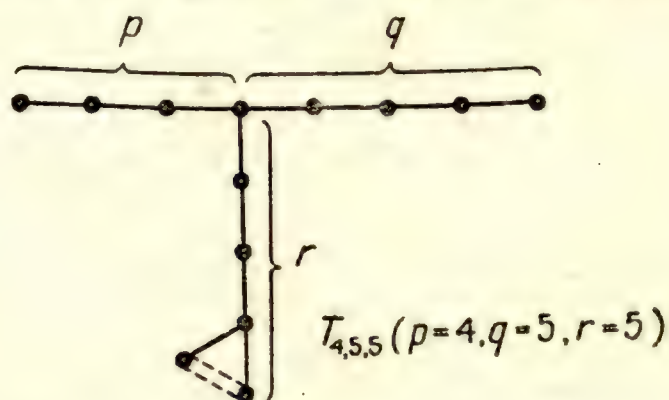
D -диаграммы унимодальных особенностей и их группы монодромии были вычислены А. М. Габриэловым [38]. Они могут быть получены с помощью результатов, изложенных в п. 3.7. Обозначим через μ_+ , μ_0 и μ_- положительный, нулевой и отрицательный индексы инерции квадратичной формы особенности, т. е. количество положительных, нулевых и отрицательных диагональных элементов в диагонализации формы пересечений особенности, стабильно эквивалентной данной и зависящей от $n \equiv 3 \pmod{4}$ переменных ($\mu_+ + \mu_0 + \mu_- = \mu$).

Теорема 21. D -диаграммы параболических особенностей P_8 , X_9 и J_{10} в некоторых отмеченных базисах имеют вид:



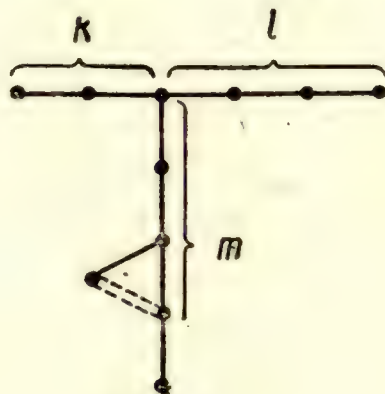
Для этих особенностей $\mu_+ = 0$, $\mu_0 = 2$.

D -диаграммы гиперболических особенностей $T_{p,q,r}$ имеют вид:



Для этих особенностей $\mu_+ = \mu_0 = 1$.

D -диаграммы 14-ти исключительных унимодальных особенностей имеют вид:



Здесь (k, l, m) — так называемые числа Габриэлова особенности (см. ОДО-1, введение к главе II), $\mu = k + l + m$. Для этих особенностей $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$.

Между числами Габриэлова (ЧГ) и числами Долгачева (ЧД; см. ОДО-1, введение к главе II) исключительных унимодальных особенностей существует «странная двойственность», выражающаяся в том, что ЧГ каждой особенности совпадают с ЧД некоторой (вообще говоря — другой) особенности, а ЧГ последней — с ЧД исходной. Объяснение этой двойственности дано Долгачевым и Пинкамом ([57], [201]). Оказывается, что ЧД квазиоднородной унимодальной особенности в некотором смысле являются ее ЧГ на бесконечности и наоборот.

Квадратичные формы и D -диаграммы бимодальных особенностей от двух переменных и их индексы инерции могут быть легко получены методами § 4. Для бимодальных особенностей трех переменных D -диаграммы получены А. М. Габриэловым (см. п. 3.7), но они неудобны для вычислений, например, индексов инерции их квадратичных форм. Индексы инерции квадратичных форм всех бимодальных особенностей могут быть получены с помощью двух общих результатов, принадлежащих Стинбринку. Один из них дает способ вычисления индексов инерции квадратичных форм для квазиоднородных особенностей.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($n \equiv 3 \pmod{4}$) — квазиоднородная особенность с весами $w_1, \dots, w_n$ и степенью 1 (это означает, что

$f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{\beta_1 \dots \beta_n} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$, где $\sum_{i=1}^n w_i \beta_i = 1$), имеющая изолированную критическую точку в нуле. Положим $l(\alpha) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1) w_i$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). Пусть мономы $x^{\alpha^{(j)}}$ ($j = 1, 2, \dots$

$\dots, \mu$) порождают базис локального кольца $J = {}_n\mathcal{O}/(\partial f/\partial x_i)$ особенности f . Через $[c]$ обозначим целую часть числа c .

Теорема 22 ([219]).

μ_+ -количество $\alpha^{(j)}$: $l(\alpha^{(j)}) \notin \mathbb{Z}$, $[l(\alpha^{(j)})]$ четна;

μ_- -количество $\alpha^{(j)}$: $l(\alpha^{(j)}) \notin \mathbb{Z}$, $[l(\alpha^{(j)})]$ нечетна;

μ_0 -количество $\alpha^{(j)}$: $l(\alpha^{(j)}) \in \mathbb{Z}$.

Это утверждение в виде гипотезы было сформулировано ранее В. И. Арнольдом (см. [54]).

Среди бимодальных особенностей часть (но не все) имеют квазиоднородных представителей. Для этих особенностей теорема 22 дает $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$. Для вычисления индексов инерции квадратичных форм остальных бимодальных особенностей используются следующие факты:

Теорема 23 ([92]). Пусть $f_t(x)$ — непрерывная деформация особенности $f_0: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($t \in [0, 1]$), причем $\mu(f_0) = \mu$, $\mu(f_t) = \mu'$ при $0 < t \leq 1$. Тогда $\mu \geq \mu'$ и группа $H_{n-1}(V_{t,\lambda}; \mathbb{Z})$ гомологий неособого множества уровня $V_{t,\lambda}$ ростка функции f_t около нуля имеет естественное вложение в группу $H_{n-1}(V_{0,\lambda}; \mathbb{Z})$ гомо-

логий неособого множества уровня $V_{0,\lambda}$ ростка f_0 . При этом отмеченный базис группы $H_{n-1}(V_{t,\lambda}; Z)$ может быть расширен до отмеченного базиса группы $H_{n-1}(V_{0,\lambda}; Z)$.

Теорема 24 ([220]). Для любой особенности $\mu_+ + \mu_0$ четно.

Из этих результатов выводится

Теорема 25. Квадратичные формы всех бимодальных особенностей имеют следующие индексы инерции: $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$.

§ 4. Матрицы пересечений особенностей функций двух переменных

Метод вычисления матриц пересечений особенностей функций двух переменных, описанный в этом параграфе, принадлежит С. М. Гусейн-Заде ([51], [52]) и Н. А'Кампо ([119], [120]). Он применим ко всем особенностям двух переменных. Его использование позволяет существенно упростить многие вычисления, связанные с квадратичной формой особенности (например, вычисление ее сигнатуры).

4.1. Матрицы пересечений вещественных особенностей. Матрица пересечений вещественной особенности функции двух переменных f может быть определена по (вещественной) линии нулевого уровня шевеления функции $\tilde{f}$ специального вида.

Пусть $f(x, y)$ — росток вещественной (т. е. принимающей вещественные значения на $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$) голоморфной функции $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, имеющий в нуле изолированную (в пространстве $\mathbb{C}^2$) критическую точку. Предположим, что существует такое вещественное шевеление $\tilde{f}$ функции f , что все ее критические точки (на которые распадается критическая точка 0 функции f) вещественны и невырождены, а значения функции $\tilde{f}$ во всех седловых точках равны нулю. Нетрудно видеть, что в этом случае значения функции $\tilde{f}$ во всех минимумах отрицательны, а во всех максимумах — положительны. Если такое шевеление существует, то матрица пересечений особенности f может быть определена по вещественной кривой $\{\tilde{f}(x, y) = 0\}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, введем некоторые определения.

Пусть в (открытом) круге D в плоскости $\mathbb{R}^2$ задана (вещественная) кривая l (замкнутая в топологическом смысле), имеющая в качестве особенностей только простые двойные самопересечения в конечном числе и трансверсально подходящая к границе круга D . Кривой l сопоставляются симметрическая и кососимметрическая целочисленные билинейные формы на решетке по правилам, описанным ниже.

Каждая связная компонента дополнения кривой l является криволинейным многоугольником. При этом у такого многоугольника некоторые пары вершин могут совпадать (как на рис. 32).

Разобьем множество компонент дополнения кривой l на два класса (первый и второй) так, чтобы две компоненты, имеющие общую сторону, относились бы к разным классам. Такое разбиение на два класса возможно и единственно с точностью до перестановки классов. Сопоставим каждой точке p_j самопересечения кривой l формальную образующую Δ_j^1 , каждой относительно компонентной в D (т. е. не граничащей с дополнением D) компоненте дополнения кривой l из первого класса (U_i^0) — формальную образующую Δ_i^0 , а из второго класса (U_k^2) — формальную образующую Δ_k^2 . Обозначим через $n_{10}(j, i)$ (аналогично $n_{21}(k, j)$) количество вершин криволинейного многоугольника U_i^0 (соответственно U_k^2), совпадающих с точкой p_j . $n_{10}(j, i)$ и $n_{21}(k, j)$ могут принимать значения 0, 1 или 2. Через $n_{20}(k, i)$ обозначим количество общих сторон криволинейных многоугольников U_k^2 и U_i^0 . Так, например, на рис. 32 $n_{20}=1$, $n_{10}=2$, $n_{21}=1$ ($i=j=k=1$).

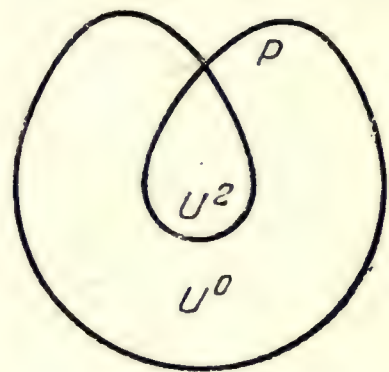


Рис. 32.

Натянем на образующие $\{\Delta_m^s\}$ целочисленную решетку и будем считать базис $\Delta_k^2, \Delta_j^1, \Delta_i^0$ отмеченным базисом этой решетки (порядок элементов Δ_m^σ с одинаковым σ несуществен). Разбиение компонент дополнения кривой l на два класса используется только для фиксирования порядка элементов Δ_m^σ в отмеченном базисе.

Определение. Квадратичная форма, соответствующая кривой l , определяется следующей таблицей скалярных произведений образующих:

$$\begin{aligned} (\Delta_m^\sigma \circ \Delta_{m'}^\sigma) &= -2\delta_{mm'}, & (\Delta_i^0 \circ \Delta_j^1) &= n_{10}(j, i), \\ (\Delta_j^1 \circ \Delta_k^2) &= n_{21}(k, j), & (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) &= -n_{20}(k, i). \end{aligned}$$

Определение. Кососимметрическая билинейная форма, соответствующая кривой l , определяется следующей таблицей скалярных произведений (совпадение обозначений с предыдущим определением не создает путаницы):

$$\begin{aligned} (\Delta_m^\sigma \circ \Delta_{m'}^\sigma) &= 0, & (\Delta_j^1 \circ \Delta_i^0) &= n_{10}(j, i), \\ (\Delta_k^2 \circ \Delta_j^1) &= n_{21}(k, j), & (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) &= n_{20}(k, i) \end{aligned}$$

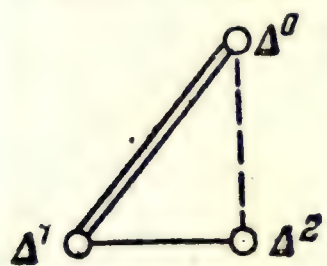


Рис. 33.

(здесь при перестановке аргументов скалярное произведение меняет знак).

D -диаграммой кривой l мы будем называть D -диаграмму соответствующей квадратичной формы. Ее вершины соответствуют самопересечениям кривой l и относительно компактным в D компонентам дополнения кривой l . Правило соединения вершин следует из таблицы индексов пересечений. Например, на рис. 33 изображена D -диаграмма кривой рис. 32. Заметим, что эта диаграмма не является D -диаграммой никакой особенности.

Пусть $\tilde{f}$ — шевеление особенности f , описанное выше, т. е. такое, что все критические точки функции $\tilde{f}$ (на которые распадается

особенность f) вещественны, а значения функции $\tilde{f}$ во всех седловых точках равны нулю. В этом случае вещественная кривая $\{\tilde{f}=0\}$ (в маленьком круге D с центром в нуле) имеет только простые двойные самопересечения. Компоненту дополнения этой кривой отнесем к первому классу, если функция $\tilde{f}$ принимает на ней отрицательные значения, и ко второму — в противном случае. Критические значения функции $\tilde{f}(x, y)$ (или, что то же самое, — функции трех переменных $\tilde{f}(x, y) + t^2$) по предположению лежат на вещественной оси в плоскости $\mathbb{C}$ значений функции $\tilde{f}$. Выберем такое z_0 , что $\operatorname{Im} z_0 > 0$, и зафиксируем систему путей, соединяющих некритическое значение z_0 с критическими значениями функции $\tilde{f}$, потребовав, чтобы эти пути целиком лежали в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением их концов, совпадающих с критическими значениями. Заметим, что критические точки функции $\tilde{f}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с самопересечениями вещественной кривой $\{\tilde{f}=0\}$ и относительно компактными компонентами ее дополнения, так как в каждой такой компоненте имеется ровно по одной критической точке функции $\tilde{f}$ (максимуму или минимуму). Зафиксировав таким способом систему путей, мы определили отмеченные базисы исчезающих циклов в гомологиях неособых многообразий уровня особенностей $f(x, y)$ и $f(x, y) + t^2$. Эти базисы мы также будем обозначать через $\{\Delta_m^\sigma\}$. При этом циклы Δ_j^1 исчезают в седловых точках p_j функции $\tilde{f}$, циклы Δ_i^0 — в минимумах, лежащих в компонентах U_i^0 , а циклы Δ_k^2 — в максимумах, лежащих в компонентах U_k^2 .

 **Теорема 1.** *Форма пересечений в гомологиях неособого многообразия уровня особенности $f(x, y)$ в описанном отмеченном базисе $\{\Delta_m^\sigma\}$ совпадает с кососимметрической билинейной формой, соответствующей вещественной кривой $\{\tilde{f}=0\}$, а форма пересечений особенности трех переменных $f(x, y) + t^2$ — с квадратичной формой, соответствующей той же кривой.*

Примеры. 1) Пусть $f(x, y) = x^m + y^n$. Кратность этой особенности равна $(m-1)(n-1)$. Положим $\tilde{f}(x, y) = \lambda^{mn} \left(T_m(\lambda^{-n}x) + 2^{n-m} T_n \left(\lambda^{-m} 2^{\frac{m-n}{n}} y \right) \right)$. Здесь $T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \cdot \arccos x)$ — многочлены Чебышева. Нетрудно видеть, что шевеление $\tilde{f}$ особенности f удовлетворяет условиям теоремы 1. Кривая $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \tilde{f}(x, y) = 0\}$ и ее D -диаграмма изображены на рис. 34 ($m=6, n=5$). При $m=k+1, n=2$ мы, как и в п. 2.9, получаем классическую диаграмму Дынкина A_k , но с другим порядком вершин.

2) $f(x, y) = x(x^{k-2} - y^2)$, особенность $D_k, k \geq 4$. Ее кратность равна k . Нетрудно подобрать шевеление $\tilde{f}$ функции f , нулевая линия уровня которого (при $k=9$) изображена на рис. 35 (для

этого можно взять шевеление функции $x^{k-2}-y^2$, подобное описанному в предыдущем примере, и умножить его на $(x-2\lambda^2)$. Ее D -диаграмма является классической диаграммой D_k .

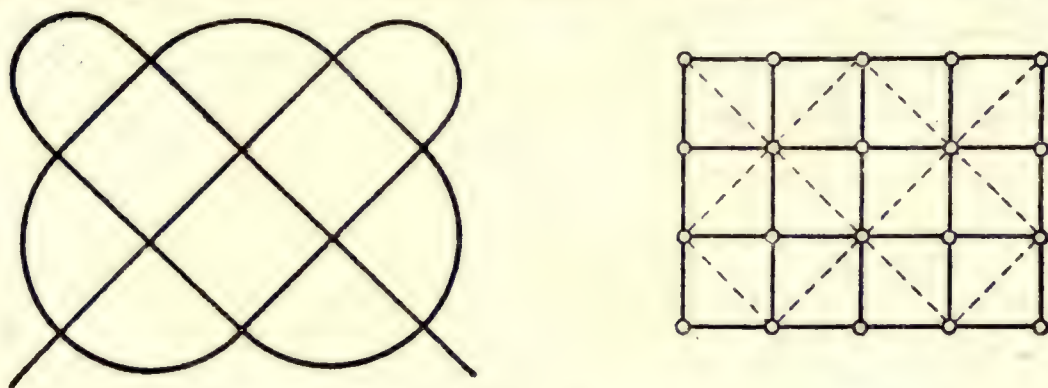


Рис. 34.

3) $f(x, y) = x^3 + xy^3 = x(x^2 + y^3)$, особенность E_7 . Шевелением, удовлетворяющим условиям теоремы 1, является $\tilde{f}(x, y) = (x + \lambda^{3/2}/3)(x^2 + y^3 - \lambda^2 y - 2\lambda^3/3\sqrt{3})$. Кривая $\{\tilde{f}=0\}$ и ее D -диаграмма приведены на рис. 36.

Недостатком теоремы 1 является то, что обычно бывает сложно подобрать шевеление $\tilde{f}$, удовлетворяющее ее условиям. Кроме того,

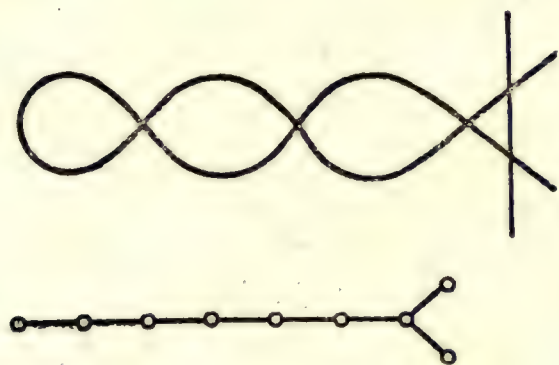


Рис. 35.

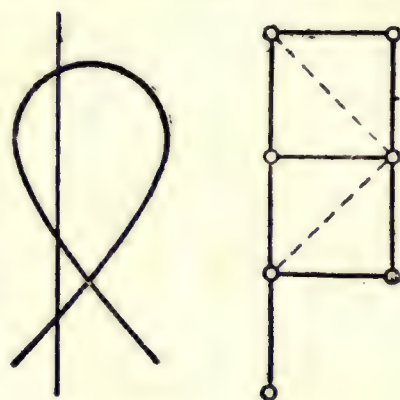


Рис. 36.

диаграммы таких особенностей, как, например, $E_6(x^3 + y^4)$, E_7 и $E_8(x^3 + y^5)$, при наиболее естественных выборах шевелений получаются отличными от их классических форм и требуют преобразования. Оказывается, что проще бывает построить не шевеление функции, а шевеление ее нулевой линии уровня. Описание соответствующей процедуры будет дано в следующих пунктах. Сформулированный ниже результат позволяет в некоторой степени устранить второй из названных недостатков.

Пусть кривая l такая же, как и раньше. Если отвлечься от самопересечений, то кривая l состоит из нескольких окружностей и интервалов. Это означает, что существует собственное невырожденное отображение $\chi: L \rightarrow D$ одномерного гладкого многообразия L в круг D такое, что $\text{Im } \chi = l$ и χ отображает L на l взаимно однозначно вне особых точек кривой l (самопересечений). Пусть $\chi_t: L \rightarrow D$ ($t \in [0, 1]$) — гомотопия отображения χ ($\chi = \chi_0$) в классе собственных невырожденных отображений, постоянных на прообразе окрестности границы круга D . Если χ_t — гомотопия общего вида, то тип кривой $\text{Im } \chi_t$ (как одномерного гладкого под-

многообразия круга D с простыми самопересечениями) будет меняться при конечном числе значений параметра t . При этих значениях параметра t будет происходить одна из трех типов перестроек: 1) сливаются и исчезают две точки самопересечения кривой $\text{Im } \chi_t$ (рис. 37, при исключительном значении параметра происходит простое касание двух ветвей кривой $\text{Im } \chi_t$); 2) появляются



Рис. 37.

две новые точки самопересечения (этот тип перестройки переходит в предыдущий при смене направления изменения параметра t); 3) сливаются и расходятся три точки самопересечения кривой $\text{Im } \chi_t$ (рис. 38, при исключительном значении параметра на кривой $\text{Im } \chi_t$ возникает точка тройного пересечения). Другие типы перестроек коразмерности один отсутствуют в связи с тем, что на отображение χ_t наложено условие невырожденности (необращение

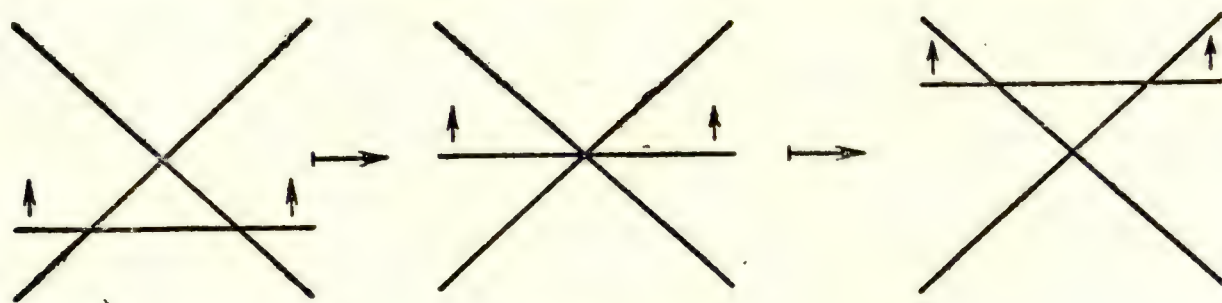


Рис. 38.

в нуль его дифференциала). При первых двух типах перестроек не сохраняется общее число точек самопересечения кривой $\text{Im } \chi_t$, и поэтому меняется размерность целочисленной решетки, сопоставляемой ей. При перестройках третьего типа размерность решетки сохраняется. Оказывается, что если все перестройки кривой $\text{Im } \chi_t$ относятся к третьему типу, то не меняется и билинейная форма, соответствующая кривой $\text{Im } \chi_t$. Происходит только замена базиса в решетке, на которой она определена.

О п р е д е л е н и е. Гомотопия χ_t называется *допустимой*, если ни для какого значения параметра $t \in [0, 1]$ не существует точек $h_1 \neq h_2$ из L , для которых $\chi_t(h_1) = \chi_t(h_2)$, $\text{Im } d\chi_t(h_1) = \text{Im } d\chi_t(h_2)$ ($d\chi_t$ — дифференциал отображения χ_t) и, кроме того, кривая $\text{Im } \chi_t$ имеет только простые двойные самопересечения.

Можно показать, что допустимая гомотопия — это гомотопия, при которой все перестройки кривой $\text{Im } \chi_t$ относятся к третьему типу (и $t=1$ не является исключительным значением параметра, т. е. при нем не происходит перестройки кривой). Если χ_t — допустимая гомотопия, то кривые $\text{Im } \chi_0 = l$ и $\text{Im } \chi_1$ имеют одно и то же количество самопересечений (а также одно и то же коли-

чество компонент дополнения). Поэтому целочисленные решетки, соответствующие этим кривым, имеют одинаковую размерность.

Теорема 2. Пусть $\chi_t: L \rightarrow D$ — допустимая гомотопия. Тогда симметрическая и кососимметрическая билинейные формы, соответствующие кривой $\text{Im } \chi_1$, получаются из форм, соответствующих кривой $\text{Im } \chi_0 = l$, при помощи операций замены отмеченного базиса.

Для доказательства можно явно указать замену базиса, которая соответствует одной перестройке кривой $\text{Im } \chi_t$ третьего типа. При этом преобразуются только четыре исчезающих цикла, соответствующие трем точкам самопересечения кривой $\text{Im } \chi_t$, которые сливаются при этой перестройке, и криволинейному треугольнику с вершинами в этих точках — компоненте связности дополнения кривой $\text{Im } \chi_t$. Явный вид такой замены базиса может быть получен для одного примера, в котором соответствующая гомотопия χ_t может быть реализована деформацией шевеления $\tilde{f}$ особенности (например, для $\tilde{f}_t(x, y) = x \cdot y \cdot (x + y + t)$; исключительное значение параметра $t = 0$). Наборы путей, определяющие отмеченные базисы в этом случае, описаны перед формулировкой теоремы 1. Выход параметра t в комплексную область и полубоход исключительного значения $t = 0$ позволяет проследить за преобразованием соответствующей системы путей.

Пусть $t = t_0$ — значение параметра, при котором происходит перестройка кривой $\text{Im } \chi_t$, относящаяся к третьему типу. Для определенности предположим, что при $t < t_0$ треугольник с вершинами в трех сливающихся точках относится к первому классу

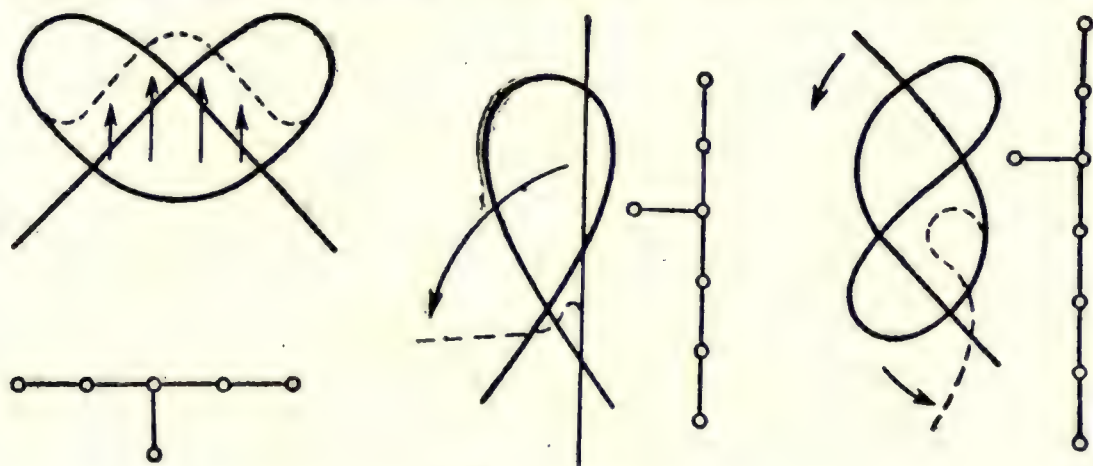


Рис. 39.

компонент дополнения кривой $\text{Im } \chi_t$ (соответствующему компонентам, на которых шевеление $\tilde{f}$ принимает отрицательные значения). При $t > t_0$ аналогичный треугольник будет относиться ко второму классу. Пусть $\Delta_m, \Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}$ — исчезающие циклы, соответствующие трем точкам самопересечения, Δ_{m+3} — цикл, соответствующий треугольнику с вершинами в них. Тогда последовательность операций $\beta_{m+3}, \beta_{m+2}, \beta_{m+1}, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \beta_{m+3}, \beta_{m+2}, \beta_{m+1}$ эквивалентна рассматриваемой перестройке кривой $\text{Im } \chi_t$.

В качестве примера применения теоремы 2 на рис. 39 изображено приведение D -диаграмм особенностей $E_6(x^3 + y^4)$, $E_7(x^3 + xy^3)$

и $E_8(x^3 + y^5)$ (см. примеры 1 и 3) к классическому виду при помощи допустимой гомотопии.

Таким образом, завершено доказательство теоремы 12 п. 3.6.

Небольшое видоизменение позволяет приспособить описанный метод вычисления матрицы пересечений особенности двух переменных для краевых особенностей (см. ОДО-I, п. 17.4) и доказать, что D -диаграммы особенностей B_k , C_k и F_4 являются классическими диаграммами соответствующих алгебр Ли, а их группы монодромии (для случая нечетного числа переменных) — соответствующими классическими группами Вейля (п. 5.2).

4.2. Ростки комплексных кривых и особенности функций двух переменных. Пусть $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющей изолированную критическую точку в нуле. Росток кривой $M(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{C}^2: f(\bar{x}) = 0\}$ может быть приводим. Пусть

$M(f) = \bigcup_{i=1}^r M_i$ — его представление в виде объединения неприводимых компонент (r — их количество). Для каждого из ростков неприводимых комплексных кривых M_i существует такой росток отображения $\varphi_i: (\mathbb{C}_i, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ (униформизация), что $\text{Im } \varphi_i = M_i$ и φ является изоморфизмом кривых $\mathbb{C}_i$ и M_i вне нуля. Росток φ_i определен с точностью до ростка голоморфного изоморфизма $(\mathbb{C}_i, 0) \rightarrow (\mathbb{C}_i, 0)$ (замены параметра униформизации). Для малых

шевелений $\tilde{\varphi}_i$ отображений φ_i общего положения комплексная кривая $\bigcup_{i=1}^r \text{Im } \tilde{\varphi}_i$ (в окрестности нуля) имеет в качестве особенностей только простые двойные точки. Их количество, которое, конечно, не зависит от выбора шевелений, обозначим через $s = s\{\varphi_i\} = s(f)$.

Лемма 1. *Кратность особенности f равна $\mu(f) = 2s(f) - (r - 1)$.*

Задача о вычислении матрицы пересечений произвольной особенности функции двух переменных может быть сведена к случаю вещественной особенности при помощи следующего утверждения.

Теорема 3. *Для любого набора ростков отображений $\{\varphi_i\}$ ($\varphi_i: (\mathbb{C}_i, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, φ_i отображает $\mathbb{C}_i$ взаимно однозначно на его образ и $\text{Im } \varphi_i \neq \text{Im } \varphi_j$ при $i \neq j$) существует набор вещественных ростков отображений $\{\psi_i\}$, лежащий в той же компоненте связности множества $s = \text{const}$ в пространстве всех наборов из r отображений $(\mathbb{C}_i, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, что и $\{\varphi_i\}$.*

При этом отображения (или кривые) $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ имеют одинаковые пары Пюизо и одинаковые порядки попарных касаний, что и дает способ построения отображений $\{\psi_i\}$.

Следствие. *Для любой особенности функции двух переменных существует вещественная особенность, лежащая в той же компоненте связности множества $\mu = \text{const}$ в пространстве всех ростков функций $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ и имеющая поэтому ту же матрицу пересечений.*

Для особенностей большего количества переменных аналогичное утверждение не доказано.

Если все отображения φ_i вещественны и существуют их вещественные шевеления $\tilde{\varphi}_i$ такие, что кривая $\bigcup_{i=1}^r \text{Im } \tilde{\varphi}_i$ имеет только простые двойные точки и все эти s точек вещественны, то D -диаграмма вещественной кривой $\left(\bigcup_{i=1}^r \text{Im } \tilde{\varphi}_i\right) \cap \mathbb{R}^2$ является D -диаграммой особенности f , соответствующей набору отображений $\{\varphi_i | i = 1, \dots, r\}$. Это следует из того, что шевеление $\tilde{f}$ особенности f , соответствующее шевелению $\{\tilde{\varphi}_i\}$ набора отображений $\{\varphi_i\}$, удовлетворяет условиям теоремы 1 (п. 4.1).

Теорема 4. *Для любого набора ростков вещественных отображений $\{\varphi_i\}$ ($\varphi_i: (\mathbb{C}_i, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$) существуют вещественные шевеления $\{\tilde{\varphi}_i\}$, для которых кривая $\bigcup_{i=1}^r \text{Im } \tilde{\varphi}_i$ имеет только простые двойные точки и все эти точки вещественны.*

Заметим, что оба существующие доказательства этой теоремы носят конструктивный характер, т. е. содержат способы построения таких шевелений. Один из этих способов (более удобный для изложения, но не более эффективный) будет описан в п. 4.3.

Из теоремы 4 следует, что если $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — такая вещественная особенность, что кривая $\{f=0\}$ вещественна (т. е. вещественны все ее неприводимые компоненты), то существует ее вещественное шевеление $\tilde{f}$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, т. е. имеющее только невырожденные вещественные критические точки с одинаковыми критическими значениями во всех седловых точках.

Почти так же этот факт доказывается для любой вещественной особенности двух переменных.

4.3. Разрешение особенностей функций двух переменных и построение их вещественных шевелений. Разрешение особенности функции $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ (или кривой $\{(x, y): f(x, y) = 0\}$) может быть построено при помощи последовательности σ -процессов.

Рассмотрим комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ и точку 0 на нем. σ -процесс с центром в точке 0 — это отображение $\sigma: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ n -мерного комплексного многообразия $\mathbb{P}^n$, которое устроено следующим образом: вне прообраза точки $0 \in \mathbb{C}^n$ отображение σ является аналитическим изоморфизмом, прообразом $\sigma^{-1}(0)$ точки 0 является $(n-1)$ -мерное комплексное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ (проективизация пространства $\mathbb{C}^n$), которое подклеено к дополнению $\mathbb{P}^n - \sigma^{-1}(0) \approx \mathbb{C}^n - 0$ так, что прямая в пространстве $\mathbb{C}^n$, проходящая через нуль, примыкает к той точке проективизации $\mathbb{C}P^{n-1}$ пространства $\mathbb{C}^n$, которая ей соответствует. Таким образом, многообразие $\mathbb{P}^n$ получается из пространства $\mathbb{C}^n$ вклеиванием вместо точки 0 $(n-1)$ -мерного проективного пространства $\mathbb{C}P^{n-1}$.

σ -процесс с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$ может быть

описан следующим образом. Пусть $(\mathbb{C}^n - 0) \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ — отображение проективизации, сопоставляющее каждому ненулевому вектору из пространства $\mathbb{C}^n$ прямую, порожденную им. Рассмотрим график этого отображения как подпространство произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Он не является замкнутым подмногообразием пространства $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Однако можно показать, что его замыкание Π^n является неособым n -мерным замкнутым подмногообразием произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Естественная проекция $\Pi^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ является взаимно однозначным отображением вне нуля пространства $\mathbb{C}^n$. Прообразом нуля является проективное пространство $0 \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Отображение $\Pi^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ является σ -процессом с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Другое (координатное) описание многообразия Π^n — следующее. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты в пространстве $\mathbb{C}^n$, $u_1: \dots: u_n$ — соответствующие однородные координаты в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$. Пусть Π^n — подпространство в произведении $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$, заданное уравнениями $x_i u_j = u_i x_j$ ($1 \leq i, j \leq n$), $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $(u_1: \dots: u_n) \in \mathbb{C}P^{n-1}$. Ниже будет показано, что Π^n является n -мерным многообразием. Обозначим через $\sigma: \Pi^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ проекцию на первый сомножитель. Если $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$, то прообраз $\sigma^{-1}(x)$ точки $x \in \mathbb{C}^n$ состоит из одной точки $(x_1, \dots, x_n; x_1: \dots: x_n)$. Поэтому вне прообраза точки $0 \in \mathbb{C}^n$ отображение σ устанавливает изоморфизм $\Pi^n - \sigma^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^n - 0$. Прообразом точки $0 \in \mathbb{C}^n$ является пространство $0 \times \mathbb{C}P^{n-1}$, изоморфное проективному пространству $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Пусть L — прямая в пространстве $\mathbb{C}^n$, проходящая через точки 0 и $(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Она состоит из точек вида $(tx_1^0, \dots, tx_n^0)$ ($t \in \mathbb{C}$). Прообраз $\sigma^{-1}(L - 0)$ прямой L без точки 0 состоит из точек произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$, имеющих вид $(tx_1^0, \dots, tx_n^0; x_1^0: \dots: x_n^0)$ ($t \neq 0$). Поэтому замыканием пространства $\sigma^{-1}(L - 0)$ является прямая $\{(tx_1^0, \dots, tx_n^0; x_1^0: \dots: x_n^0)\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Эта прямая проходит через точку $(0, \dots, 0; x_1^0: \dots: x_n^0)$ прообраза $\sigma^{-1}(0) = 0 \times \mathbb{C}P^{n-1}$, соответствующую прямой L .

Чтобы показать, что пространство Π^n является неособым комплексным многообразием, рассмотрим его в окрестности точки $(0, \dots, 0, u_1^0: \dots: u_n^0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Пусть, например, $u_1^0 \neq 0$. Поскольку $u_1: \dots: u_n$ — однородные координаты в пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$, можно считать, что $u_1^0 = 1$. Пусть $\mathbb{C}_1^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ — аффинная часть проективного пространства $\mathbb{C}P^{n-1}$, заданная условием $u_1 = 1$. В части $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}_1^{n-1}$ произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$ пространства Π^n может быть задано уравнениями $x_j = x_1 u_j$ ($j = 2, \dots, n$). Отсюда видно, что пространство $\Pi^n \cap (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}_1^{n-1})$ изоморфно n -мерному комплексному векторному пространству с координатами $x_1, u_2, \dots, u_n$ и поэтому неособо. Из уравнений, определяющих пространство Π^n , вытекает, что в части, определяемой условием $u_1 = 1$, координаты $u_2, \dots, u_n$ выражаются через координаты $x_1, \dots, x_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ по формулам $u_j = x_j/x_1$ ($j = 2, \dots, n$).

Нетрудно показать, что описанная конструкция не зависит от выбора координат $x_1, \dots, x_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ и поэтому применима к любому комплексно-аналитическому пространству и его неособой точке. Для доказательства надо проверить, что любой локальный комплексно-аналитический изоморфизм $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ поднимается до комплексно-аналитического изоморфизма $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ в окрестности прообраза $\sigma^{-1}(0) = \mathbb{C}P^{n-1}$.

Пусть теперь $n=2$, $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющей изолированную критическую точку в нуле, $M = \{(x, y): f(x, y) = 0\}$ — росток комплексно-аналитической кривой в пространстве $\mathbb{C}^2$. При σ -процессе $\sigma: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ с центром в нуле вместо точки $0 \in \mathbb{C}^2$ вклеивается проективная прямая $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{P}^2$ с координатами $(u: v)$. В этом случае композиция $f \circ \sigma$ является голоморфной функцией на окрестности пространства $\sigma^{-1}(0)$ в многообразии $\mathbb{P}^2$. Функция $f \circ \sigma$ будет, вообще говоря, иметь неизолированные критические точки. Она обращается в нуль на вклеенной проективной прямой $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{P}^2$, причем прямая $\mathbb{C}P^1$ входит в дивизор $\{f \circ \sigma = 0\}$ с кратностью, равной степени m ростка $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Это означает, что в окрестности точки $(1:0) \in \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{P}^2$, заданной условием $u=1$, функция $f \circ \sigma$ имеет вид $f \circ \sigma = x_1^m \cdot g_1$, где g_1 не обращается тождественно в нуль на вклеенной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Степень m ростка f — это наименьшая из степеней мономов, входящих в разложение f с ненулевыми коэффициентами. Аналогичное соотношение ($f \circ \sigma = y^m \cdot g_2$) имеет место и в окрестности точки $(0:1) \in \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{P}^2$, заданной условием $v=1$. Поэтому в качестве особенностей функции $f \circ \sigma$ надо рассматривать не все те точки, в которых ее дифференциал обращается в нуль. Таких точек слишком много и среди них большинство — такие, в окрестности которых функция $f \circ \sigma$ эквивалентна функции x^m . Надо учитывать только точки, в которых функция g_1 (или g_2) обращается в нуль. Однако g_1 (или g_2) — это функция на части многообразия $\mathbb{P}^2$, определяемой условием необращения в нуль одной из координат. Определить ее на многообразии $\mathbb{P}^2$ инвариантным способом невозможно (не рассматривая ее как сечение некоторого расслоения).

Чтобы избежать трудностей такого рода, мы будем рассматривать не особенность функции $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, а особенность ростка кривой $M = \{f=0\}$. В соответствии с п. 4.2 задачу построения вещественных шевелений особенности f , нужных для определения ее матрицы пересечений, можно заменить задачей

построения вещественных шевелений кривой M . Пусть $M = \bigcup_{i=1}^r M_i$ —

разложение ростка M на неприводимые компоненты. Каждая из кривых M_i может быть задана уравнением $f_i=0$ степени m_i

(где $f = \prod_{i=1}^r f_i$, $m = \sum_{i=1}^r m_i$).

Рассмотрим временно одну из неприводимых кривых M_i (индекс i будем пока опускать). Как уже говорилось, существует росток отображения $\varphi: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, образом которого является росток M и которое вне нуля является изоморфизмом $\mathbb{C} \rightarrow M$. Отображение φ задается формулами $x = x(t) = at^m + \dots$, $y = y(t) = bt^m + \dots$, где многоточие обозначает сумму членов более высоких степеней (t — координата на прямой $\mathbb{C}$, x и y — координаты в плоскости $\mathbb{C}^2$; либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$). Можно показать, что натуральное число m совпадает со степенью ростка функции, определяющей кривую M . Линейная замена координат в пространстве $\mathbb{C}^2$ позволяет убрать член степени m у ряда $y(t)$, т. е. считать, что $x(t) = at^m + \dots$, $y(t) = bt^n + \dots$, где $n > m$, $a \neq 0$. После этого (локальная) замена $\tilde{t} = \sqrt[m]{x(t)} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{t^m + \dots} = \sqrt[m]{a} (t + \dots)$ координаты на прямой $\mathbb{C}$ позволяет считать, что $x(t) = t^m$, $y(t) = bt^n + \dots$ ($n > m$). Если n делится на m ($n = k \cdot m$), то замена $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y - bx^k$ уничтожает член степени n у ряда $y(t)$. Поэтому после замен переменных в прообразе $\mathbb{C}$ и в образе $\mathbb{C}^2$ можно считать, что отображение φ задается формулами $x(t) = t^m$, $y(t) = \sum_{k \geq n} a_k t^k$ ($n > m$, $a_n \neq 0$), где n не делится

на m . При этом наибольшее общее кратное m , n и тех k , для которых $a_k \neq 0$, равно 1. Нетрудно видеть, что в этом случае кривая M касается координатной прямой $y = 0$. Уравнение кривой M может быть записано в виде $y = \sum_{k \geq n} a_k x^{k/m}$. Ряд $\sum_{k \geq n} a_k x^{k/m}$

по дробным степеням переменной x называется *рядом Пюизо* кривой M . Пару натуральных чисел (n, m) назовем *старшими пока-зателями Пюизо* кривой M .

Для более полного описания ростка M используют набор так называемых *характеристических пар Пюизо*. Представим отношение n/m в виде несократимой дроби n_1/m_1 . Пара (n_1, m_1) называется *первой характеристической парой Пюизо* ростка кривой M . Если наибольшее общее кратное чисел n и m (которое равно m/m_1) равно единице (в этом случае, конечно, $m_1 = m$), то этим исчерпываются все характеристические пары Пюизо. Если $m/m_1 > 1$, то пусть $k_2 = \min \{k: a_k \neq 0, k \text{ не делится на } (m/m_1)\}$. Представим отношение $k_2/(m/m_1)$ в виде несократимой дроби n_2/m_2 . Пара (n_2, m_2) называется *второй характеристической парой Пюизо* ростка кривой M . Если $m/(m_1 m_2) = 1$, то этими двумя парами исчерпываются характеристические пары Пюизо. Если $m/(m_1 m_2) > 1$, то пусть $k_3 = \min \{k: a_k \neq 0, k \text{ не делится на } (m/m_1 m_2)\}$, $k_3/(m/(m_1 m_2)) = n_3/m_3, \dots$. В конце концов мы получаем последовательность взаимно простых пар натуральных чисел $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_g, m_g)$, называемых *характеристическими парами Пюизо* кривой M . При этом $m_1 \cdot \dots \cdot m_g = m$, $n_{i-1} m_i < n_i$. Можно показать, что характеристические пары Пюизо дают довольно подроб-

ное описание топологии ростка кривой M . В частности, ростки кривых с одинаковыми характеристическими парами Пюизо топологически эквивалентны между собой и являются нулевыми многообразиями уровня особенностей ростков функций, находящихся в одном семействе $\mu = \text{const}$.

Проследим за тем, что происходит с кривой M при σ -процессе $\sigma: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. В аффинной части многообразия $\mathbb{P}^2$, определяемой условием $u=1$, координатами являются x и $v=y/x$ ($(u:v)$ — однородные координаты на проективной прямой $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{P}^2$). Из формул $x(t)=t^m$, $y(t)=t^n + \dots$ вытекает, что в координатах (x, v) на многообразии $\mathbb{P}^2$ имеем $x(t)=t^m$, $v(t)=t^{n-m} + \dots$. Отсюда следует, что прообраз $\sigma^{-1}(M-0)$ кривой M без нуля при σ -процессе пополняется до кривой $\sigma^{-1}(M)$ в многообразии $\mathbb{P}^2$. При этом кривая $\sigma^{-1}(M)$ пересекается с вклеенной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ в точке $(1:0)$. Из параметрических уравнений, определяющих кривую $\sigma^{-1}(M)$ вытекает, что они в некотором смысле имеют меньшую степень, чем уравнения кривой M . Если $m < n < 2m$, то степень кривой $\sigma^{-1}(M)$ (равная $n-m$) просто меньше, чем степень кривой M . Если же $n > 2m$, то степень кривой $\sigma^{-1}(M)$ (равная m) совпадает со степенью кривой M , однако первый из старших показателей Пюизо $(n-m, m)$ у кривой $\sigma^{-1}(M)$ меньше, чем у кривой M .

Таким образом, особенность кривой $\tilde{M} = \sigma^{-1}(M)$ в описанном смысле проще, чем особенность кривой M . Производя σ -процесс на поверхности $\mathbb{P}^2$ с центром в особой точке кривой $\tilde{M} = \sigma^{-1}(M)$, мы получаем поверхность $\tilde{\mathbb{P}}^2$ ($\tilde{\sigma}: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$) и кривую $\tilde{\tilde{M}} = \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{M})$ на ней, особенность которой будет еще проще. Комплексная проективная прямая на поверхности $\tilde{\mathbb{P}}^2$, которая вклеивается при этом σ -процессе, будет трансверсально пересекаться с проективной прямой, вклеиваемой при первом σ -процессе, причем только в одной точке. Повторяя этот процесс нужное число раз, мы, наконец, дойдем до того, что прообраз кривой M будет неособым.

Пусть теперь кривая M не обязательно неприводима ($M = \bigcup_{i=1}^r M_i$). Производя σ -процесс в нуле, затем — в особых точках прообразов кривых $M_i, \dots$, мы дойдем до такого положения, при котором все r прообразов кривых M_i будут неособыми. Это означает, что мы получим аналитическое отображение $\pi: (Z, Z_0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ (суперпозицию σ -процессов) неособой аналитической поверхности Z в пространство $\mathbb{C}^2$ такое, что:

1) ограничение отображения π на $Z - Z_0$ является изоморфизмом $Z - Z_0 \rightarrow \mathbb{C}^2 - 0$;

2) подпространство $Z_0 = \pi^{-1}(0)$ является объединением комплексных проективных прямых на поверхности Z , находящихся в общем положении;

3) прообразы $\pi^{-1}(M_i)$ кривых $M_i \subset \mathbb{C}^2$ (замыкания $\pi^{-1}(M_i - 0)$) являются неособыми кривыми на поверхности Z . Общность положения проективных прямых, из которых состоит подпространство Z_0 , означает, что они имеют только парные взаимные пересечения, причем две проективные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально в одной точке.

Кривые $\pi^{-1}(M_i)$ могут касаться друг друга, а также вклеенных комплексных проективных прямых. Нетрудно видеть, что σ -процесс в точке касания двух неособых кривых понижает степень их касания, а σ -процесс в точке их трансверсального пересечения разводит их, т. е. делает не пересекающимися. Поэтому, произведя дополнительно нужное число σ -процессов, можно считать, что кривые $\pi^{-1}(M_i)$ не пересекаются друг с другом и пересекаются с прообразом Z_0 нуля трансверсально в его неособых точках (т. е. не в точках пересечения разных вклеенных проективных прямых).

Такое отображение $\pi: (Z, Z_0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ мы будем называть *разрешением* кривой $M = \{(x, y): f(x, y) = 0\}$. Можно показать, что это отображение является разрешением особенности функции f в смысле п. 3.5.

Пусть, например, кривая M неприводима и задается параметрическими уравнениями $x = t^2$, $y = t^5$, σ -процесс с центром в нуле приводит ее к кривой вида $x = t^2$, $y = t^3$. σ -процесс в особой

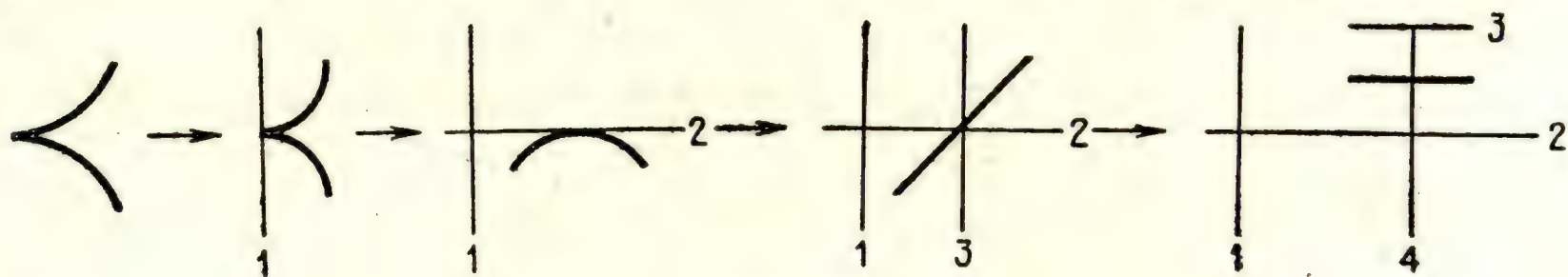


Рис. 40.

точке этой кривой приводит к неособой кривой, касающейся вклеенной проективной прямой, причем это касание является простым. σ -процесс в точке касания приводит к тому, что прообраз кривой M будет пересекаться с двумя вклеенными проективными прямыми в точке их пересечения. Наконец, σ -процесс в этой точке пересечения окончательно приведет прообраз рассматриваемой кривой и все вклеенные проективные прямые в общее положение (рис. 40; для ясности кривая M и ее прообразы изображены более жирными линиями, а вклеенные проективные прямые перенумерованы в порядке вклеивания).

Другой пример (для особенности функции $f(x, y) = x(x^2 + y^3)$, $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 = \{x = 0\}$, $M_2 = \{x^2 + y^3 = 0\}$) приведен на рис. 41.

Нетрудно показать, что кратность, а следовательно, и матрица пересечений особенности функции, соответствующей кривой $M = \bigcup_{i=1}^r M_i$, определяется тем, какие из вклеенных проективных пря-

мых и прообразов кривых M_i пересекаются между собой, и не зависит от того, в каких конкретно точках они (трансверсально) пересекаются. Отсюда следует, что без вреда для кратности особенности и ее матрицы пересечений мы можем считать, что все

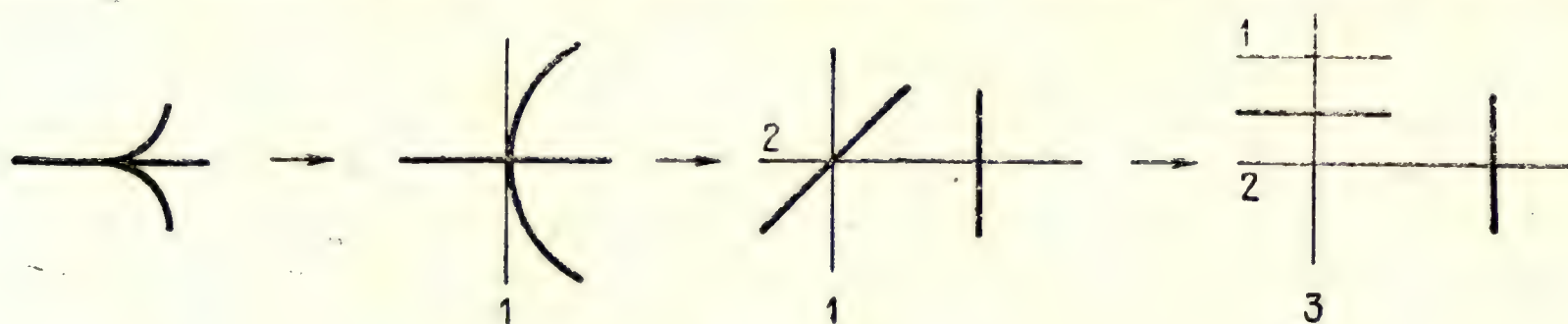


Рис. 41.

вклеенные проективные прямые и прообразы кривых M_i вещественны (т. е. все σ -процессы производились только в вещественных точках соответствующих поверхностей, а кривые M_i сами были вещественными). В этом случае на рисунках 40 и 41 изображены вещественные части вклеенных проективных прямых и кривых M_i .

Изложенная выше конструкция по сути дела является доказательством теоремы 3.

Стягивание одной из вклеенных проективных прямых (последней по порядку вклеивания) приводит к ситуации, когда несколько неособых кривых (вклеенных проективных прямых и прообразов кривых M_i) пересекаются в одной точке, причем попарно трансверсально. Шевелением можно добиться, чтобы эти кривые не

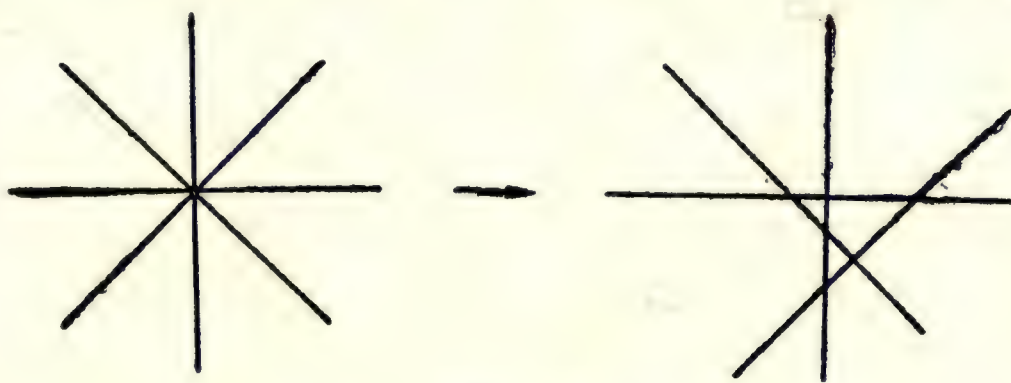


Рис. 42.

имели более чем парных пересечений, а простые парные пересечения все были бы вещественными (рис. 42).

Стягивая так все вклеенные проективные прямые (в порядке, обратном их вклеиванию при разрешении особенности) и на каждом шаге шевелением избавляясь от более чем парных пересечений, мы дойдем до таких шевелений исходных кривых M_i , которые имеют только простые двойные пересечения (как сами с собой, так и друг с другом), причем все эти пересечения вещественны. Таким образом, нами будут построены шевеления кривых M_i , требующиеся для определения матрицы пересечений особенности в соответствии с п. 4.2.

Для особенностей, разрешения которых изображены на рис. 40 и 41, соответствующие построения проведены на рис. 43 и 44.

Описанный способ построения вещественных шевелений обладает тем недостатком, что для его проведения требуется построение разрешения особенности при помощи последовательности σ -процессов, что является довольно длинной процедурой. Например,

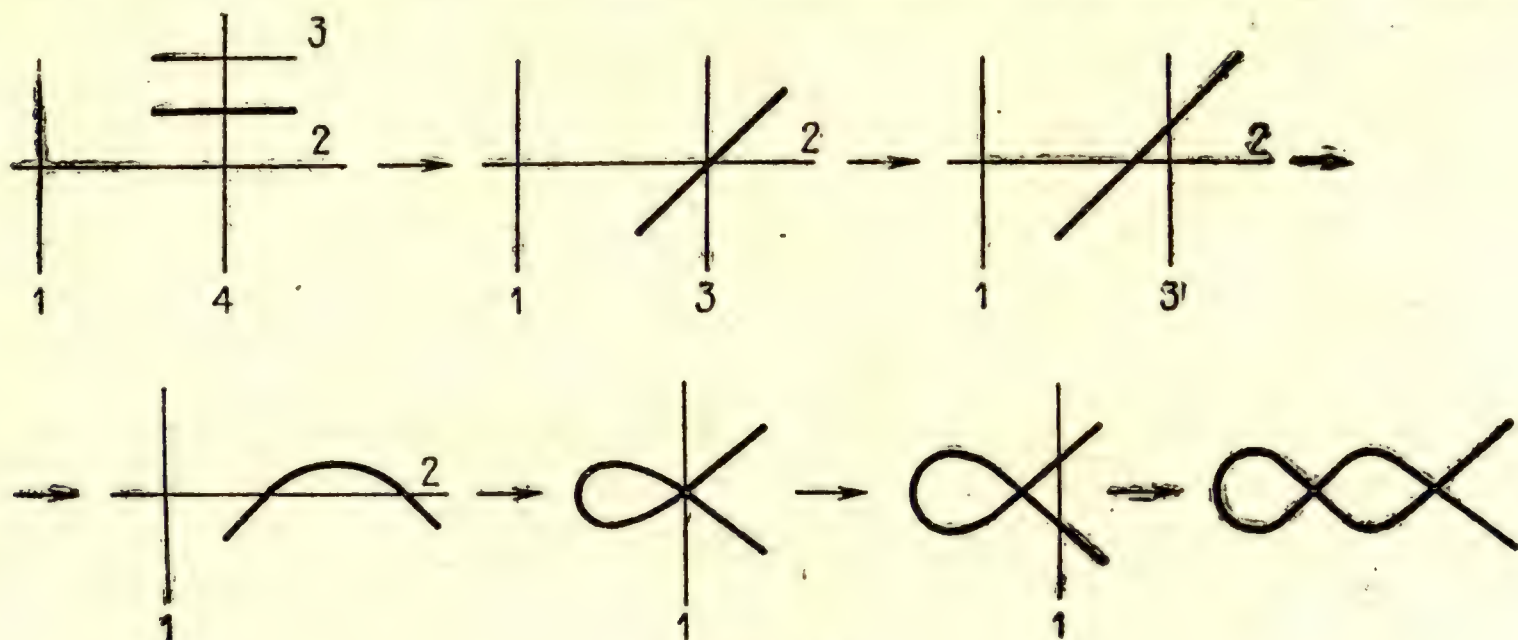


Рис. 43.

для особенности $x^m + y^n$, рассматриваемой в п. 4.1 (пример 1), этот способ требует многочисленных (хотя и простых) построений. Более эффективным является способ, основанный на индукции по парам Пюизо особенности, однако он более сложен для описания.

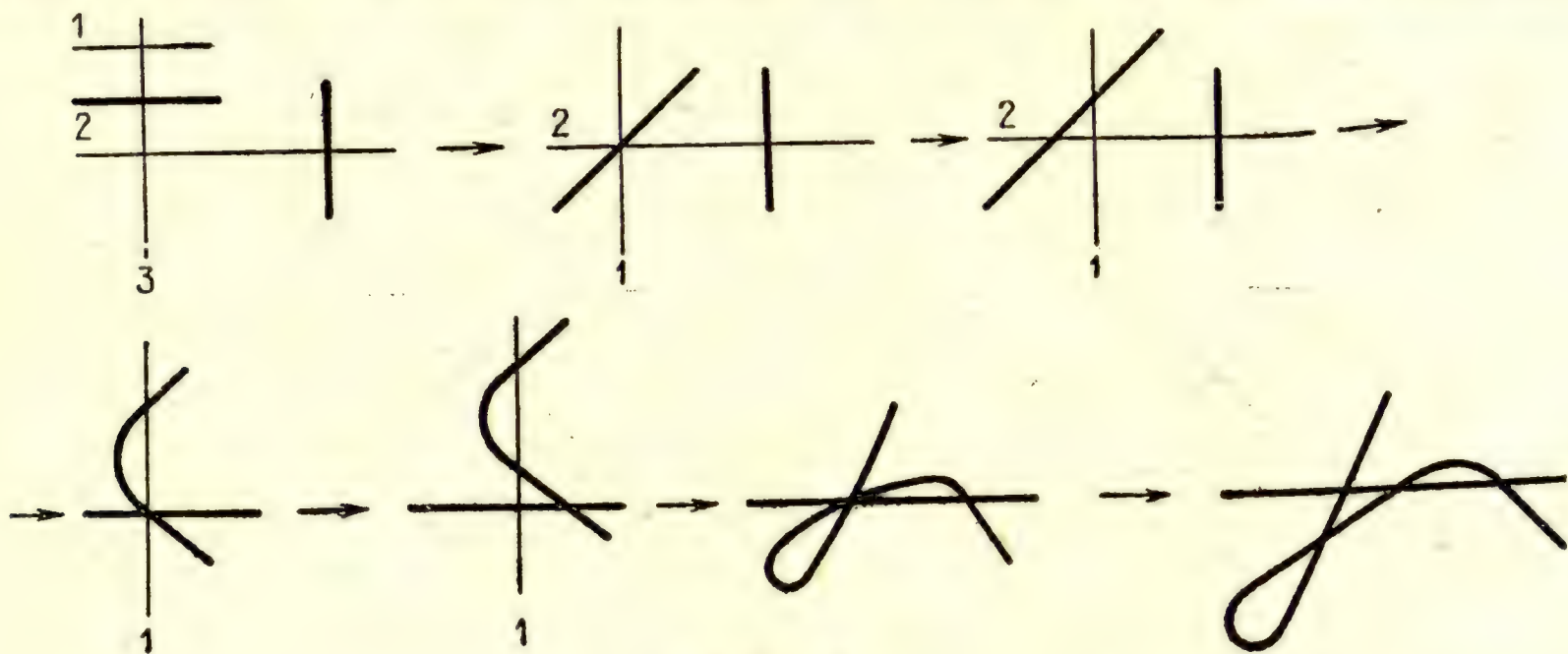


Рис. 44.

4.4. Частичная диагонализация квадратичной формы особенности. Уже говорилось, что возможность представления D -диаграммы особенности функции двух переменных в виде D -диаграммы вещественной кривой позволяет существенно упрощать некоторые вычисления, связанные с соответствующей квадратичной формой (например, вычисление ее индексов инерции).

Индексы пересечений (формальных) исчезающих циклов, соответствующих вещественной кривой l (см. п. 4.1), связаны между собой соотношением специального вида.

Лемма 2. Имеет место равенство

$$2n_{20}(k, i) = \sum_j n_{21}(k, j) n_{10}(j, i).$$

Доказательство может быть получено из простых геометрических рассуждений.

Вложим целочисленную решетку с базисом $\Delta_i^0, \Delta_j^1, \Delta_k^2$ в вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^\mu$ с тем же базисом и продолжим квадратичную форму $(x \circ y)$ на все пространство $\mathbb{R}^\mu$. Определим в пространстве $\mathbb{R}^\mu$ новый базис $\bar{\Delta}_i^0, \bar{\Delta}_j^1, \bar{\Delta}_k^2$ по формулам $\bar{\Delta}_i^0 = \Delta_i^0 + \frac{1}{2} \sum_j (\Delta_i^0 \circ \Delta_j^1) \Delta_j^1$, $\bar{\Delta}_j^1 = \Delta_j^1$, $\bar{\Delta}_k^2 = \Delta_k^2 + \frac{1}{2} \sum_j (\Delta_k^2 \circ \Delta_j^1) \Delta_j^1$. Пользуясь леммой 2, нетрудно проверить, что $(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_j^1) = (\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_j^1) = (\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_i^0) = 0$. Кроме того, $(\bar{\Delta}_j^1 \circ \bar{\Delta}_{j'}^1) = -2\delta_{jj'}$. Тем самым мы произвели частичную диагонализацию матрицы пересечений.

Нетрудно видеть, что $(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_i^0) = -2 + \frac{1}{2} \sum_j [n_{10}(j, i)]^2$, $(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_k^2) = -2 + \frac{1}{2} \sum_j [n_{21}(k, j)]^2$. Отсюда следует, что, если среди областей,

ограниченных кривой l (или кривой, получающейся из нее при помощи допустимой гомотопии), имеется хотя бы один четырехугольник, то ее квадратичная форма не является отрицательно определенной, а если среди них есть многоугольник с количеством сторон больше четырех, то она не является и неположительно определенной.

Продemonстрируем одно применение этой конструкции. Для квадратичной формы на решетке Z^μ имеет смысл говорить о ее определителе, так как определитель замены базиса в целочисленной решетке равен ± 1 . Обозначим через $D(f)$ определитель квадратичной формы, соответствующей особенности f . Определитель $D(f)$ равен нулю, если отображение $i_*: H_{n-1}(V_\varepsilon) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ групп гомологий, индуцированное вложением $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ (для особенности $f(x, y) \mp t^2$), не является мономорфизмом, и с точностью до знака равен порядку коядра $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon) / \text{Im } i_*$ отображения i_* в противном случае (матрица отображения i_* и есть матрица пересечений особенности).

Теорема 5. Пусть $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — особенность функции двух переменных и r — количество неприводимых сомножителей, на которые может быть разложен росток функции f (т. е. количество неприводимых компонент у кривой $\{f=0\}$). Тогда $D(f)$ делится на 2^{r-1} .

В частности, если функция f приводима, т. е. $r > 1$, то отображение i_* (для особенности $f(x, y) \mp t^2$) не может быть изоморфизмом.

Доказательство. В соответствии с теоремами 3 и 4 (п. 4.2) построим набор вещественных отображений $\tilde{\varphi}_i: \mathbb{C}_i \rightarrow \mathbb{C}^2$ (опре-

деленных в окрестности нуля) такой, что D -диаграмма кривой $\left(\bigcup_{i=1}^r \text{Im } \tilde{\varphi}_i\right) \cap \mathbb{R}^2$ совпадает с D -диаграммой особенности f . Пусть $\{\Delta_m^\sigma\}$ — базис решетки, на которой определена квадратичная форма $(x \circ y)$, соответствующая этой кривой. Количество самопересечений с кривой $(\bigcup \text{Im } \tilde{\varphi}_i) \cap \mathbb{R}^2$ равно количеству базисных элементов Δ_j^1 . Количество остальных элементов базиса (Δ_i^0 и Δ_k^2) равно $s - (r - 1)$ (сравните с леммой 1 п. 4.2). Матрица перехода от базиса $\{\Delta_m^\sigma\}$ целочисленной решетки к базису $\{\bar{\Delta}_m^\sigma\}$ пространства $\mathbb{R}^\mu$, описанному выше, имеет определитель, равный $+1$. Поэтому $D(f)$ совпадает с определителем матрицы квадратичной формы особенности f в базисе $\{\bar{\Delta}_m^\sigma\}$. Этот определитель разлагается в произведение трех определителей: $|(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_i^0)|$, $|(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_k^2)|$ и $|(\bar{\Delta}_j^1 \circ \bar{\Delta}_j^1)|$. Последний из них равен $(-2)^s$. Легко видеть, что индексы пересечений $(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_i^0)$ и $(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_k^2)$ принадлежат множеству полуцелых чисел $(1/2 \cdot \mathbb{Z})$. Поэтому $|(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_i^0)| \cdot |(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_k^2)| \in 2^{-s+(r-1)} \cdot \mathbb{Z}$, откуда следует, что $D(f) = \pm 2^s \cdot |(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_i^0)| \cdot |(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_k^2)|$ принадлежит $2^{r-1}\mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

Например, для особенности A_k ($f(x, y) = x^{k+1} + y^2$) определитель $D(f)$ равен $(-1)^k(k+1)$.

Приведем еще один пример применения частичной диагонализации квадратичной формы особенности функции двух переменных.

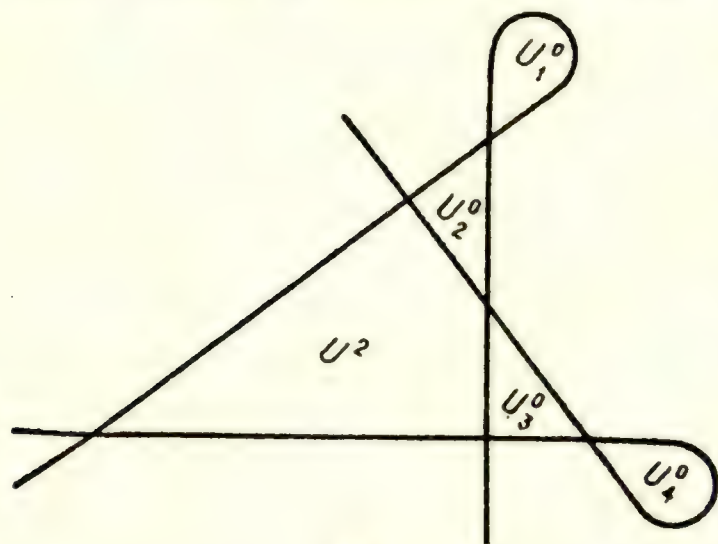


Рис. 45.

Рассмотрим особенность функции $f(x, y) = x^5 + x^2y^2 + y^5$. Она эквивалентна особенности функции $(x^3 + y^2) \times (x^2 + y^3)$. Вещественное шевеление кривой $\{f(x, y) = 0\}$, имеющее только вещественные простые двойные самопересечения, изображено на рис. 45.

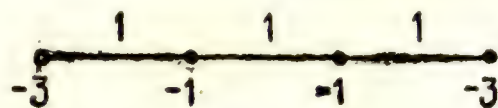


Рис. 46.

Кратность особенности f равна 11. В базисе $\bar{\Delta}_m^\sigma$, определенном выше, квадратичная форма особенности f распадается в прямую сумму трех квадратичных форм. Одна из них — на шестимерном подпространстве, порожденном элементами $\bar{\Delta}_j^1$, — является отрицательно определенной. Вторая — на одномерном подпространстве, порожденном элементом $\bar{\Delta}^2$, которому на рис. 45 соответствует четырехугольник U^2 , — является нулевой. Наконец, третья — на четырехмерном подпространстве, порожденном элементами $\bar{\Delta}_1^0, \dots, \bar{\Delta}_4^0$, которым на рис. 45 соответствуют «одноугольники» и треугольники $U_1^0, \dots, U_4^0$. При этом $(\bar{\Delta}_1^0 \circ \bar{\Delta}_1^0) = (\bar{\Delta}_4^0 \circ \bar{\Delta}_4^0) = -3/2$, $(\bar{\Delta}_2^0 \circ \bar{\Delta}_2^0) = (\bar{\Delta}_3^0 \circ \bar{\Delta}_3^0) = -1/2$,

$(\bar{\Delta}_1^0 \circ \bar{\Delta}_2^0) = (\bar{\Delta}_2^0 \circ \bar{\Delta}_3^0) = (\bar{\Delta}_3^0 \circ \bar{\Delta}_4^0) = 1/2$ (см. рис. 46, где указаны индексы самопересечений и индексы пересечений базисных элементов $\bar{\Delta}_i^0$, умноженные для удобства на два). Такая форма легко диагонализируется и имеет положительный индекс инерции, равный 1, а отрицательный — равный 3. Отсюда следует, что квадратичная форма особенности f имеет положительный индекс инерции $\mu_+ = 1$, нулевой $\mu_0 = 1$ и отрицательный $\mu_- = \mu - 2 = 9$. Поэтому эта особенность является гиперболической в смысле ОДО-1.

§ 5. Формы пересечений краевых особенностей и топология полных пересечений

В этом параграфе будут кратко изложены некоторые обобщения, связанные, в основном, с понятиями формы пересечений и исчезающих циклов, для особенности функций на многообразии с краем, для полных пересечений, ...

5.1. Особенности с действиями конечных групп. Некоторые понятия и результаты, изложенные в предыдущих параграфах, могут быть обобщены на случай, когда рассматривается росток функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, инвариантный относительно линейного действия конечной группы G на пространстве $\mathbb{C}^n$. Кроме того, на этом пути естественным образом возникают особенности, соответствующие алгебрам Ли B_k , C_k , F_4 и G_2 , корневые системы которых содержат векторы разной длины.

Пусть имеется линейное представление конечной группы G на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$. Преобразование пространства $\mathbb{C}^n$, соответствующее элементу g группы G , мы будем обозначать через T_g . Предположим, что $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток функции, инвариантный относительно действия группы G , т. е. такой, что $f(T_g x) = f(x)$ для $g \in G$. В этом случае группа G действует на неособом многообразии уровня $V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ функции f вблизи критической точки, а тем самым — на его группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ с коэффициентами в группах $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

В случае, когда f — обычная особенность функции (т. е. когда группа G тривиальна), кратностью особенности f называется размерность пространства $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})$ (или $H_{n-1}(V_\varepsilon, \mathbb{C})$). Естественным аналогом размерности для случая, когда группа G не тривиальна, является G -модуль $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})]$ (или $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})]$) как элемент кольца $R_{\mathbb{R}}(G)$ (соответственно — $R_{\mathbb{C}}(G)$) вещественных (соответственно комплексных) представлений группы G (см. [90]). Будем обозначать через $[H]$ элемент $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})]$ кольца $R(G) = R_{\mathbb{C}}(G)$ комплексных представлений группы G .

Пусть ${}_n\mathcal{O}$ — кольцо ростков в нуле голоморфных функций n переменных, $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ — якобиев идеал ростка f , т. е. идеал, порожденный частными производными функции f . Размерность факторкольца Q_f кольца ${}_n\mathcal{O}$ по якобиеву идеалу $(\partial f / \partial x_1, \dots$

..., $\partial f / \partial x_n$) (как комплексного векторного пространства) совпадает с кратностью особенности f . Действие группы G на пространстве $\mathbb{C}^n$ определяет ее представление на кольце ${}_n\mathcal{O}$. В случае, когда росток f инвариантен относительно действия группы G , это представление естественным образом определяет представление группы G на векторном пространстве Q_f . Как уже говорилось, размерности векторных пространств $H = H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ и Q_f совпадают. Соотношение между $[H]$ и $[Q_f]$ как элементами группы $R(G)$ выявлено в [235].

На пространстве $\mathbb{C}^n$, на котором определен росток функции f , линейно действует группа G . Поэтому она действует и на его n -й внешней степени $\lambda^n \mathbb{C}^n$, которая является одномерным векторным пространством. Действие элемента $g \in G$ на пространстве $\lambda^n \mathbb{C}^n$ совпадает с умножением на определитель $\det T_g$ оператора T_g .

Представлению группы G на векторном пространстве V соответствует ее представление на двойственном векторном пространстве V^* . Например, представлению группы G на пространстве $H = H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ гомотопий неособого многообразия уровня соответствует двойственное представление на пространстве $H^* = H^{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ когомологий неособого многообразия уровня.

Теорема 1 ([235]). *G -модули (т. е. векторные пространства с представлениями группы G) H и $Q_f^* \otimes_{\mathbb{C}} \lambda^n \mathbb{C}^n$ изоморфны.*

Изоморфизм, существование которого утверждается в теореме 1, определен не канонически.

В п. 3.5 указывалось, что вместо вычисления кратности особенности, т. е. размерности группы гомотопий неособого многообразия уровня V_ε , часто бывает удобно вычислять его эйлерову характеристику $\chi(V_\varepsilon)$. Если X — топологическое пространство (для определенности — конечный клеточный комплекс), на котором действует группа G , то эквивариантной эйлеровой характеристикой $\chi_G(X)$ пространства X называется элемент $\sum_q (-1)^q [H_q(X; \mathbb{C})]$ кольца $\hat{R}(G)$ комплексных представлений группы G , где $[H_q(X; \mathbb{C})]$ — элемент кольца $R(G)$, определенный группой q -мерных гомотопий пространства X с соответствующим представлением G . Эквивариантная эйлерова характеристика $\chi_G(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня V_ε равна $[\mathbb{C}] + (-1)^{n-1} [H]$, где $[\mathbb{C}]$ — элемент кольца $R(G)$, определенный одномерным пространством $\mathbb{C}$ с тривиальным представлением группы G (группа $H_0(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ нульмерных гомотопий неособого многообразия уровня одномерна, а представление группы G на ней тривиально).

Если действие группы G согласовано со структурой клеточного комплекса на пространстве X , то на векторном пространстве $C_q(X; \mathbb{C})$ q -мерных клеточных цепей пространства X с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$ определено естественное представление группы G . Можно показать, что, по аналогии с соотношением $\chi(X) =$

$= \sum_q (-1)^q \dim C_q(X; \mathbb{C})$ для обычной эйлеровой характеристики, для эквивариантной эйлеровой характеристики имеет место формула $\chi_G(X) = \sum_q (-1)^q [C_q(X; \mathbb{C})]$.

Известно (см., например, [90]), что элемент $[V]$ из кольца $R(G)$ комплексных представлений группы G определяется своим характером $[V](g) = \text{tr } T_g|_V$ как функцией на группе G ($\text{tr } T_g|_V$ — след оператора $T_g|_V$). Если X — клеточный комплекс с действием группы G , согласованным со структурой клеточного комплекса, то значение $\chi_G(X)(g)$ характера элемента $\chi_G(X) \in R(G)$ на $g \in G$ совпадает с (обычной) эйлеровой характеристикой $\chi(X_g)$ множества X_g неподвижных точек действия элемента g на пространстве X . Это вытекает из того, что вне множества X_g элемент g переставляет клетки, и поэтому эти клетки дают нулевой вклад в $\text{tr}(g_*|C_q(V_g; \mathbb{C}))$. Клетки же, лежащие в X_g , остаются на месте и дают в $\text{tr}(g_*|C_q(V_g; \mathbb{C}))$ единичный вклад.

Отсюда следует

Теорема 2. *Характер эквивариантной эйлеровой характеристики неособого многообразия уровня особенности f определяется формулой $\chi_G(V_g)(g) = 1 + (-1)^{d_g-1} \mu_g$, где d_g — размерность подпространства пространства $\mathbb{C}^n$, на котором элемент $g \in G$ действует тривиально, μ_g — кратность ограничения функции f на это подпространство.*

Кратность μ_g определена, поскольку, если функция f имеет изолированную критическую точку в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$, то и на подпространствах, неподвижных относительно элемента $g \in G$, она также имеет изолированные критические точки.

Следствие. *Характер естественного представления группы G на пространстве гомологий $H = H_{n-1}(V_g; \mathbb{C})$ неособого многообразия уровня определяется формулой $[H](g) = (-1)^{n-d_g} \mu_g$.*

Если G — конечная подгруппа унитарной группы $U(n)$, порожденная отражениями, то $\mathbb{C}^n/G \cong \mathbb{C}^n$. Росток $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, инвариантный относительно действия группы G , определяет росток f_* на $(\mathbb{C}^n/G, 0) \cong (\mathbb{C}^n, 0)$.

Теорема 3 ([235]). $\mu(f_*) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (-1)^{n-d_g} \mu_g$, где $|G|$ — количество элементов в группе G .

Пример. Пусть $G = Z_2$ — группа из двух элементов, действующая на пространстве $\mathbb{C}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ по формуле $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($\sigma \in Z_2$ — неединичный элемент группы). Изоморфизм пространства $\mathbb{C}^n/Z_2$ с пространством $\mathbb{C}^n$ с координатами $y_1, \dots, y_n$ определяется формулами $y_1 = x_1^2$, $y_i = x_i$ при $2 \leq i \leq n$. В этом случае $|G| = 2$, подпространство пространства $\mathbb{C}^n$, инвариантное относительно преобразования σ , совпадает с $(n-1)$ -мерным пространством $\{x_1 = 0\}$. Теорема 3 дает $\mu(f_*) = \frac{1}{2} (\mu(f) -$

— $\mu(f | \{x_1 = 0\})$, где $\mu(f | \{x_1 = 0\})$ — кратность ограничения ростка f на подпространство $\{x_1 = 0\}$. Нетрудно видеть, что $f | \{x_1 = 0\} = f_* | \{y_1 = 0\}$. Поэтому $\mu(f) = 2\mu(f_*) + \mu(f_* | \{y_1 = 0\})$.

Рассмотрим действие группы Z_2 в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})$ неособого многообразия уровня функции f . Группа Z_2 имеет два неприводимых вещественных представления: тривиальное и умножение на (-1) . Поэтому группа гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})$ распадается в прямую сумму $H^+ \oplus H^-$, где H^+ — пространство инвариантных относительно инволюции σ_* циклов, а H^- — антиинвариантных; $\dim H^+ + \dim H^- = \mu(f)$.

Следствие из теоремы 2 дает $[H](\sigma) = \dim H^+ - \dim H^- = -\mu(f | \{x_1 = 0\}) = -\mu(f_* | \{y_1 = 0\})$. Так как $\dim H^+ + \dim H^- = 2\mu(f_*) + \mu(f_* | \{y_1 = 0\})$, то $\dim H^+ = \mu(f_*)$, $\dim H^- = \mu(f_*) + \mu(f_* | \{y_1 = 0\})$.

Эти формулы могут быть доказаны и непосредственно (без использования теорем 2 и 3), что может быть упражнением для читателя.

Классификация особенностей функций, инвариантных относительно такого действия циклической группы Z_2 , совпадает с классификацией особенностей функций на многообразии с краем (см. ОДО-1, § 17). Классификация особенностей малой коразмерности функций, инвариантных относительно действия группы $(Z_2)^q$ (интерпретируемая как классификация особенностей функций на многообразии с «углами»), рассматривалась, в частности, в [218].

5.2. Особенности функций на многообразии с краем. Здесь будут вкратце изложены аналоги некоторых обсуждавшихся понятий для особенностей функций на многообразии с краем. Более подробное изложение и мотивировку введения соответствующих понятий можно найти в [8].

Пусть f — особенность функции на многообразии с краем (см. ОДО-1, § 17). Это означает, что f — росток голоморфной функции $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$, в котором зафиксирована гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$, причем как на пространстве $\mathbb{C}^n$, так и на подпространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ функция f имеет изолированную критическую точку в нуле (или вообще не имеет критической точки в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$). Можно считать, что гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$ задается уравнением $x_1 = 0$, где $x_1, \dots, x_n$ — координаты на пространстве $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\hat{\mathbb{C}}^n$ — двулистное накрытие пространства $\mathbb{C}^n$, ветвящееся вдоль гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-1}$. Если $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ — координаты в пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$, то разветвленное накрытие $\hat{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ определяется формулами $x_1 = \hat{x}_1^2, x_2 = \hat{x}_2, \dots, x_n = \hat{x}_n$. На пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$ имеется естественная инволюция $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \mapsto (-\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, т. е. определено действие циклической группы Z_2 второго порядка. Ростку f отвечает росток $\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = f(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ функции на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$, который инвариантен относительно

действия группы Z_2 . Локальному аналитическому автоморфизму пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющему подпространство $\mathbb{C}^{n-1}$, отвечает эквивариантный относительно действия группы Z_2 локальный аналитический автоморфизм пространства $\hat{\mathbb{C}}^n$. Таким образом, особенности функций на многообразии с краем естественным образом можно рассматривать как ростки функций $\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, инвариантных относительно инволюции $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \mapsto (-\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$. Наоборот, каждому такому ростку отвечает особенность функции на многообразии $\mathbb{C}^n$ с краем $\mathbb{C}^{n-1}$.

Особенности f функции на многообразии с краем можно сопоставить неособые многообразия уровня двумя способами. Самой функции f соответствует ее неособое многообразие уровня $V_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^n: f(x) = \varepsilon, \|x\| \leq \rho\}$, являющееся $(n-1)$ -мерным комплексным многообразием с границей (понимаемой в обычном вещественном смысле). Краю $\mathbb{C}^{n-1}$ соответствует $(n-2)$ -мерное комплексное подмногообразие $V'_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^{n-1}: f(x) = \varepsilon, \|x\| \leq \rho\}$ — неособое многообразие уровня ограничения функции f на гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$.

Из точной гомологической последовательности пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$

$$\dots \rightarrow H_{n-1}(V'_\varepsilon) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) \rightarrow H_{n-2}(V'_\varepsilon) \rightarrow \\ \rightarrow H_{n-2}(V_\varepsilon) \rightarrow \dots,$$

в которой $H_k(V_\varepsilon) = 0$ при $k \neq n-1$, $H_k(V'_\varepsilon) = 0$ при $k \neq n-2$, следует, что $H_k(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) = 0$ при $k \neq n-1$, $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ — свободная абелева группа, размерность которой равна сумме кратностей критической точки функции f на пространстве $\mathbb{C}^n$ и критической точки ее ограничения на пространство $\mathbb{C}^{n-1}$. Из общих теорем гомотопической топологии следует (по крайней мере при количестве переменных $n > 2$, когда пространство $V_\varepsilon/V'_\varepsilon$ односвязно; для $n = 2$ доказательство еще проще), что факторпространство $V_\varepsilon/V'_\varepsilon$ имеет гомотопический тип букета нескольких сфер. Количество $\mu = \mu(f|_{x_1})$ этих сфер называется *кратностью* краевой особенности f (в обозначении зафиксирована сама функция и координата, обращающаяся в нуль на краю $\mathbb{C}^{n-1}$). Как показано, кратность $\mu(f|_{x_1})$ краевой особенности равна сумме $\mu(f) + \mu(f|_{\{x_1=0\}})$ кратностей особых точек функции f на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n-1}$.

Базис в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ может быть построен следующим образом. Пусть $\tilde{f}$ — шевеление особенности f общего вида. Последнее означает, что функция $\tilde{f}$ на пространстве $\mathbb{C}^n$ и ее ограничение $\tilde{f}|_{\mathbb{C}^{n-1}}$ на край $\mathbb{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ являются морсовскими и, кроме того, критические значения функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$ различны. В частности, функция $\tilde{f}$ не имеет критических точек, лежащих на гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$. Пусть $\mu(f) = \mu_0$, $\mu(f|_{\{x_1=0\}}) = \mu_1$, $z_1, \dots, z_{\mu_0}$ — критические значения функции $\tilde{f}$ в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$, $z'_1, \dots, z'_{\mu_1}$ — критические значения ограни-

чения функции $\tilde{f}$ на подпространство $\mathbb{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$, z_0 — некритическое значение функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$. Пусть $F_{z_0} = \{x \in \mathbb{C}^n : \tilde{f}(x) = z_0, \|x\| \leq \rho\}$ и $F'_{z_0} = F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$ — неособые многообразия уровня функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$. Как и для обычных особенностей функций, при выполнении естественных ограничений пара многообразий (F_{z_0}, F'_{z_0}) диффеоморфна паре $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Если u — путь, соединяющий некоторое критическое значение z_i функции $\tilde{f}$ с некритическим значением z_0 (и не проходящий через критические значения функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$), то, как и раньше, ему соответствует исчезающий цикл Δ в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$ неособого многообразия уровня функции $\tilde{f}$, изоморфной группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня функции $\tilde{f}$. При этом, поскольку путь u не проходит через критические значения функции $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$, поднятие гомотопии $t \mapsto u(t)$ до гомотопии слоя может быть выбрано так, что оно сохраняет подмногообразия $F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$. В этом случае цикл Δ целиком лежит вне подмногообразия $F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$.

Из точной последовательности пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ следует, что естественный гомоморфизм $i_*: H_{n-1}(V_\varepsilon) \rightarrow H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, индуцированный вложением $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, является мономорфизмом. Поэтому пути u отвечает исчезающий цикл в относительных гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня по модулю подмногообразия $\{x_1 = 0\}$.

Если u — путь, соединяющий критическое значение z'_j функции $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$ (не являющееся критическим для функции $\tilde{f}$) с некритическим значением z_0 ($u(0) = z'_j$, $u(1) = z_0$) и не проходящий через критические значения функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$, то ему соответствует исчезающий «полуцикл» $\Delta' \in H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, определяемый следующим способом. Пусть $p'_j \in \mathbb{C}^{n-1}$ — критическая точка функции $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$, $\tilde{f}(p'_j) = z'_j$. Можно показать, что в окрестности точки p'_j локальной заменой координат, сохраняющей гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$,

функция $\tilde{f}$ может быть приведена к виду $\tilde{f} = -x_1 + \sum_{k=2}^n x_k^2 + z'_j$. Без

потери общности можно считать, что $z'_j = 0$ и что для малых t $u(t) = t$. В этом случае для малых $t > 0$ на неособом многообразии уровня $F_{u(t)} = \{\tilde{f} = t\}$ имеется $(n-1)$ -мерное вещественное подмногообразие $D^{n-1}(t)$ с краем, определяемое соотношениями

$$\operatorname{Im} x_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad \sum_{k=2}^n x_k^2 \leq t, \quad x_1 = \sum_{k=2}^n x_k^2 - t \leq 0 \quad (\text{см.}$$

рис. 47 для $n=2$). Многообразие $D^{n-1}(t)$ диффеоморфно $(n-1)$ -мерному шару. Его граница $((n-2)$ -мерная сфера) лежит на подмногообразии $F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$. Изменение t от 0 до 1 определяет непрерывное семейство $(n-1)$ -мерных дисков $D^{n-1}(t) \subset F_{u(t)}$, для которых $S^{n-2}(t) = \partial D^{n-1}(t) \subset F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$ для всех значений $t \in [0, 1]$. При этом $D^{n-1}(t) \cap \{x_1 = 0\} = \partial D^{n-1}(t)$. Диск $D^{n-1}(1) \subset F_{z_0}$

с границей $\partial D^{n-1}(t) = S^{n-2}(t)$, лежащий в подмногообразии $F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$, определяет относительный цикл Δ' в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0}, F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\})$, изоморфной группе $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$.

Пусть $u_1, \dots, u_{\mu_0}$ (соответственно $u'_1, \dots, u'_{\mu_1}$) — система путей, соединяющих критические значения $z_1, \dots, z_{\mu_0}$ (соответственно $z'_1, \dots, z'_{\mu_1}$) функции $\tilde{f}$ (соответственно — $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$) с некритическим значением z_0 , и определяющая в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\tilde{f}$ (соответственно — $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$) отмеченный базис исчезающих циклов. При этом будем предполагать, что пути $u_1, \dots, u_{\mu_0}, u'_1, \dots, u'_{\mu_1}$ не проходят через критические значения $z_1, \dots, z_{\mu_0}, z'_1, \dots, z'_{\mu_1}$ функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$ (при $t \neq 0$). Как объяснено выше, такие системы путей определяют набор исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_{\mu_0}$ и набор исчезающих полуциклов $\Delta'_1, \dots, \Delta'_{\mu_1}$ в относительной группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Граничный гомоморфизм $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) \rightarrow H_{n-2}(V'_\varepsilon)$ пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ переводит исчезающий полуцикл Δ'_j в исчезающий цикл в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$, соответствующий пути u'_j . Отсюда и из точной последовательности пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ следует, что набор элементов $\Delta_1, \dots, \Delta_{\mu_0}, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{\mu_1}$ образует базис в относительной группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$.

Можно показать, что размерность группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ совпадает с размерностью базы миниверсальной деформации краевой особенности $f|_{x_1}$, которая равна $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (x_1 \partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n)$, где $\mathcal{O}_n$ — кольцо ростков голоморфных функций в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Все сказанное выше подсказывает, что относительная группа гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ для краевой особенности должна играть ту же роль, что и абсолютная группа гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ для обычных особенностей. Однако оказывается, что на группе $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ нельзя инвариантным образом определить форму пересечений и получить аналог формулы Пикара — Лефшеца. Это вынуждает вместо нее иметь дело с другой группой, также изоморфной целочисленной решетке $Z^\mu = Z^{\mu_0 + \mu_1}$ размерности $\mu = \mu(f|_{x_1})$, но не имеющей канонически определенного изоморфизма с группой $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Эта группа определяется следующим способом.

Краевой особенности f можно поставить в соответствие еще одно неособое многообразие уровня — многообразие уровня $\hat{V}_\varepsilon$ соответствующей инвариантной относительно группы Z_2 функции $\hat{f}$ на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$. На этом многообразии уровня определено действие инволюции, индуцированное из ее действия на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$. Факторпространство пространства $\hat{V}_\varepsilon$ по действию этой инволюции совпадает с многообразием уровня V_ε функции f . Многообра-

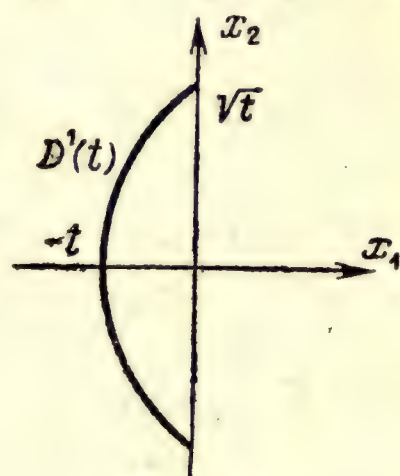


Рис. 47.

зие $\hat{V}_\varepsilon$ является разветвленным накрытием над многообразием V_ε с ветвлением вдоль подмногообразия V'_ε . При этом $\dim H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon) = 2 \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-2}(V'_\varepsilon) = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ (см. пример в п. 5.1). В группе гомологий $H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon, Z)$ выделяются два подпространства H^+ и H^- , соответствующие двум возможным неприводимым вещественным представлениям группы Z_2 . Подпространство H^+ состоит из инвариантных относительно действия инволюции σ классов гомологий (т. е. таких, что $\sigma_* a = a$), а подпространство H^- — из антиинвариантных ($\sigma_* a = -a$). В примере в п. 5.1 показано, что $\dim H^+ = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon)$, $\dim H^- = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-2}(V'_\varepsilon) = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Группа H^- , изоморфная целочисленной решетке размерности $\mu(f|\{x_1=0\})$, и играет для краевых особенностей роль, которую группа $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ играет для обычных особенностей. В частности, на ней (как на подгруппе группы $H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия) определена форма пересечений.

Базис группы H^- может быть построен следующим образом. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_{\mu_0}, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{\mu_1}$ — базис из исчезающих циклов и полуциклов группы $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, построенный выше по системе путей $u_1, \dots, u_{\mu_0}, u'_1, \dots, u'_{\mu_1}$, соединяющих критические значения $z_1, \dots, z_{\mu_0}, z'_1, \dots, z'_{\mu_1}$ функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$ с некритическим значением z_0 . Прообраз цикла Δ_i ($i=1, \dots, \mu_0$) при отображении $\hat{V}_\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$ (являющемся двулиственным разветвленным накрытием, ветвящимся вдоль подмногообразия V'_ε) состоит из двух циклов $\Delta_i^{(1)}$ и $\Delta_i^{(2)}$, каждый из которых изоморфно проектируется на цикл Δ_i . Их разность $\hat{\Delta}_i = \Delta_i^{(1)} - \Delta_i^{(2)}$ является антиинвариантным циклом в гомологиях многообразия $\hat{V}_\varepsilon$. Прообраз полуцикла Δ'_j также состоит из двух полуциклов $\Delta_j'^{(1)}$ и $\Delta_j'^{(2)}$, изоморфно проектирующихся на Δ'_j , однако полуциклы $\Delta_j'^{(1)}$ и $\Delta_j'^{(2)}$ имеют общую границу (лежащую на многообразии ветвления). Поэтому их разность $\hat{\Delta}'_j = \Delta_j'^{(1)} - \Delta_j'^{(2)}$ также является абсолютным антиинвариантным циклом в гомологиях многообразия $\hat{V}_\varepsilon$. Циклы $\hat{\Delta}_1, \dots, \hat{\Delta}_{\mu_0}, \hat{\Delta}'_1, \dots, \hat{\Delta}'_{\mu_1}$ образуют базис в группе H^- антиинвариантных классов гомологий.

Их можно описать также следующим способом. Рассмотрим функцию $\hat{\tilde{f}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \tilde{f}(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$. Она имеет $\mu_0 + \mu_1$ критических значений $z_1, \dots, z_{\mu_0}, z'_1, \dots, z'_{\mu_1}$. При этом критические значения $z_1, \dots, z_{\mu_0}$ дважды вырождены и принимаются в парах различных критических точек. Каждому из этих критических значений (z_i) соответствуют два исчезающих цикла $\hat{\Delta}_i^1$ и $\hat{\Delta}_i^2$. При этом можно считать, что $\sigma_* \hat{\Delta}_i^1 = \hat{\Delta}_i^2$. Критическому значению z'_j соответствует один исчезающий цикл Δ'_j . Нетрудно видеть, что $\sigma_* \hat{\Delta}'_j = -\hat{\Delta}'_j$. Циклы $\hat{\Delta}_i = \hat{\Delta}_i^1 - \hat{\Delta}_i^2$, а также циклы $\hat{\Delta}'_j$ являются антиинвариант-

ными, циклы $\hat{\Delta}_i^1 + \hat{\Delta}_i^2$ — инвариантными относительно действия инволюции σ . Набор циклов $\{\hat{\Delta}_i, \hat{\Delta}_j'\}$ совпадает с описанным выше.

Таким образом, для краевых особенностей определена целочисленная решетка H^- с формой пересечений на ней. Базис решетки H^- , построенный по системе путей $\{u_i, u_j'\}$, соединяющих критические значения z_i и z_j' функции $\hat{f}$ с некритическим значением z_0 , содержит μ_0 «длинных» исчезающих циклов $\hat{\Delta}_i (= \Delta_i^{(1)} - \Delta_i^{(2)})$ и μ_1 «коротких» исчезающих циклов $\hat{\Delta}_j'$. Если количество переменных $n \equiv 3 \pmod{4}$, то $(\hat{\Delta}_i \circ \hat{\Delta}_i) = -4$, $(\hat{\Delta}_j' \circ \hat{\Delta}_j') = -2$.

На решетке H^- действует группа монодромии, являющаяся образом естественного представления $\pi_1(\mathbb{C} - \{z_i, z_j'\}) \rightarrow \text{Aut } H^-$ фундаментальной группы дополнения к множеству критических значений функции $\hat{f}$. Группа монодромии порождена операторами монодромии, отвечающими простым петлям τ_i и τ_j' , соответствующим путям u_i и u_j' . При этом простой петле τ_j' соответствует обычный оператор Пикара — Лефшеца $h_j'(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2} (a \circ \Delta_j') \Delta_j'$, а петле τ_i — оператор Пикара — Лефшеца $h_i(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2} \times \times (a \circ \Delta_i) \Delta_i / 2$. Заметим, что индекс пересечения $(a \circ \Delta_i)$ антиинвариантного цикла $a \in H^-$ с длинным исчезающим циклом Δ_i всегда четен. При количестве переменных $n \equiv 1 \pmod{2}$ операторы h_i и h_j' являются отражениями в гиперплоскостях, ортогональных (в смысле формы пересечений) исчезающим циклам Δ_i и Δ_j' соответственно.

Для краевых особенностей, как и для обычных, определены миниверсальная деформация и бифуркационные диаграммы множеств и функций. Миниверсальная деформация краевой особенности $f|_{x_1}$ может быть задана в виде

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \varphi_i(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu}) \in \mathbb{C}^{\mu}),$$

где ростки $\varphi_1, \dots, \varphi_{\mu}$ порождают базис векторного пространства ${}_n\mathcal{O} / \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. Множество (точнее, его росток в нуле) значений параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu})$ в базе миниверсальной деформации, для которых либо соответствующая функция $F(\cdot, \lambda)$, либо ее ограничение на край $\mathbb{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ имеет нуль критическим значением, называется *бифуркационной диаграммой множеств* краевой особенности $f|_{x_1}$ (и обозначается Σ). Условие, выделяющее значения параметров $\lambda \in \Sigma$, может быть заменено на эквивалентное условие, состоящее в том, что нуль является критическим значением функции

$$\hat{F}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda) = F(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda).$$

Бифуркационная диаграмма множеств краевой особенности приводима. Она является объединением двух компонент. Первая

состоит из тех значений параметров λ , для которых функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет нуль критическим значением, а вторая — из тех значений λ , для которых ее ограничение на край $\mathbb{S}^{n-1}$ имеет нуль критическим значением. Иногда удобнее бывает говорить, что вторая компонента состоит из тех значений λ , для которых гиперповерхность $\{x: F(x, \lambda) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ не трансверсальна к краю $\mathbb{S}^{n-1}$. Такая формулировка не требует специальных оговорок для случая $n = 1$.

Из того, что бифуркационная диаграмма множеств обычной особенности неприводима (теорема 2, п. 3.2), следует, что каждая из описанных компонент бифуркационной диаграммы множеств краевой особенности неприводима. Так же, как в теореме 4 п. 3.2, отсюда выводится, что группа монодромии краевой особенности транзитивно действует на множествах коротких и длинных исчезающих циклов (не перемешивая, конечно, их между собой).

Для простых краевых особенностей B_k, C_k, F_4 (ОДО-1, § 17) бифуркационная диаграмма множеств может быть получена способом, описанном в п. 3.3 для обычных особенностей функций. Это означает, что она биголоморфно эквивалентна многообразию нерегулярных орбит соответствующей группы, порожденной отражениями, действующей на комплексификации евклидова пространства. При этом зеркала двух типов (ортогональные к длинным и коротким корням соответственно) порождают две компоненты бифуркационной диаграммы множеств простой краевой особенности.

Покажем, как это проверяется для простых особенностей типа B_k ($f(x_1) = x_1^k, n = 1$) и C_k ($f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2^k, n = 2$). Их миниверсальные деформации могут быть заданы в виде

$$\begin{aligned} F &= x_1^k + \lambda_1 x_1^{k-1} + \dots + \lambda_k \text{ для } B_k, \\ F &= x_1 x_2 + x_2^k + \lambda_1 x_2^{k-1} + \dots + \lambda_k \text{ для } C_k. \end{aligned}$$

И в том и в другом случае нуль не является критическим значением функции $F(\cdot, \lambda)$, если многочлен $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_k$ не имеет кратных корней, локальное многообразие уровня функции $F(\cdot, \lambda)$ трансверсально к краю $\{x_1 = 0\}$, если нуль не является корнем этого многочлена. Таким образом, бифуркационные диаграммы множеств особенностей B_k и C_k отождествляются с пространством многочленов вида $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_k$, имеющих кратные либо нулевые корни.

Группы Вейля B_k и C_k одинаковы. Они состоят из преобразований пространства $\mathbb{R}^k$ (или его комплексификации $\mathbb{C}^k$), являющихся перестановками координат с произвольными изменениями их знаков. Зеркалами являются гиперплоскости $z_i = 0$ и $z_i = \pm z_j$. В одном случае первые из них соответствуют коротким циклам, а вторые — длинным; в другом — наоборот. Пространство орбит действия группы Вейля на комплексификации $\mathbb{C}^k$ отождествляется с пространством многочленов степени k вида $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_k$ (с комплексными коэффициентами), если точке $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ сопоставить многочлен с корнями $z_1^2, \dots, z_k^2$. Пространство много-

членов степени k изоморфно k -мерному комплексному векторному пространству. Пространство нерегулярных орбит (т. е. образ объединения зеркал при отображении факторизации) состоит из многочленов с кратными, либо нулевыми корнями, т. е. совпадает с бифуркационными диаграммами множеств особенностей B_k и C_k .

Бифуркационные диаграммы множеств особенностей B_2 и C_2 состоят из двух кривых $\lambda_2 = 0$ и $4\lambda_2 = \lambda_1^2$ (рис. 48).

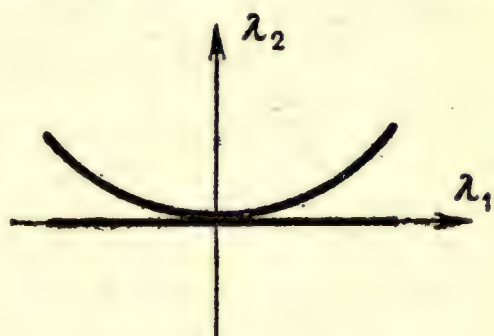


Рис. 48.

Описание базисов из исчезающих циклов и формы пересечений для простых краевых особенностей (и для других краевых особенностей двух переменных) может быть получено методами § 4. Можно показать, что для краевых особенностей имеются аналоги теорем 1, 3 и 4 § 4, однако мы не будем на этом останавливаться. Для простых особенностей $B_k (\pm x^k \pm y^2)$, $C_k (xy \pm y^k)$ и $F_4 (\pm x^2 + y^3)$ соответствующие эквивариантные ростки функций на накрытии $\hat{\mathbb{C}}^2$ пространства $\mathbb{C}^2$ задаются формулами $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^{2k} + \hat{y}^2$ для B_k , $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}(\hat{x}^2 - \hat{y}^{k-1})$ для C_k и $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^4 + \hat{y}^3$ для F_4 (выбор знаков произведен с таким расчетом, чтобы кривые $\{\hat{f} = 0\}$ были вещественными). Как обычные ростки функций они имеют особенности типов A_{2k-1} , D_{k+1} и E_6 соответственно. Легко построить шевеления $\tilde{f}$ ростков функций $\hat{f}$ (или ростков кривых $\{\hat{f} = 0\}$), которые бы удовлетворяли условиям теоремы 1 п. 4.1 и были бы инва-

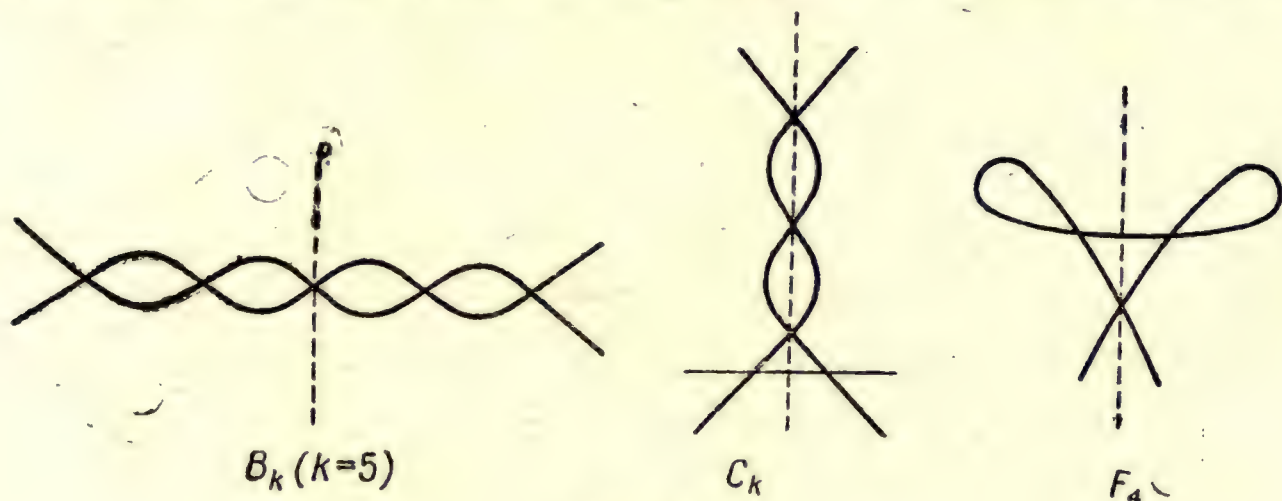
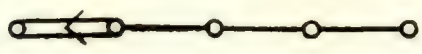


Рис. 49.

риантными относительно инволюции, действующей на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^2$. В действительности этими свойствами будут обладать шевеления особенностей A_{2k-1} , D_{k+1} и E_6 , использовавшиеся в § 4. Соответствующие вещественные кривые $\{\tilde{f} = 0\}$ изображены на рис. 49. Пунктиром нанесена линия $x = 0$. Базис группы гомологий локального многообразия уровня особенности $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{t}^2$, описанный в теореме 1 п. 4.1, инвариантен относительно инволюции $\sigma: (\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) \rightarrow (-\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$, действующей на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^3$ в том смысле, что $\sigma_* \Delta = -\Delta$, если базисный исчезающий цикл Δ

соответствует критической точке функции $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y})$, лежащей на прямой $\{\hat{x}=0\}$, и $\sigma_*\Delta_1 = \Delta_2$, если Δ_1 и Δ_2 — базисные исчезающие циклы, соответствующие критическим точкам, расположенным симметрично относительно прямой $\{\hat{x}=0\}$. Отсюда сразу следует, что D -диаграммы особенностей B_k , C_k и F_4 устроены так, как это

$B_k (k=5)$ 

$C_k (k=6)$ 



Рис. 50.

показано на рис. 50. При этом правила чтения этих диаграмм несколько отличаются от правил п. 2.8. Стрелки на ребрах направлены от вершин, соответствующих длинным исчезающим циклам (с индексом самопересечения (-4)), к вершинам, соответствующим коротким исчезающим циклам (с индексом самопересечения (-2)).

Индекс пересечения исчезающих циклов, соответствующих вершинам, соединенным ребром кратности k , равен $2k$, если оба цикла длинные, и k — в противном случае (если оба короткие, или один из них длинный, а другой — короткий). Для диаграмм особенностей B_k , C_k и F_4 , приведенных на рис. 50, это означает, что угол между исчезающими циклами, соответствующими вершинам, соединенным ребром кратности 1, равен $2\pi/3$, а угол между исчезающими циклами, соответствующими вершинам, соединенным ребром кратности 2, равен $3\pi/4$.

И. Г. Щербак показала, что переход от функции $f(x, y)$ с краем $\{x=0\}$ к функции $f(x, y) + zx$ с краем $\{z=0\}$ определяет на множестве классов стабильно эквивалентных краевых особенностей инволюцию, переставляющую особенность в некраевом смысле и сужение на край.

5.3. Топология полных пересечений. Пусть $f = (f_1, \dots, f_p): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ — росток аналитического отображения, определяющий полное пересечение с изолированной особенностью в нуле ($n \geq p$, $f_i: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$). Это означает, что во всех точках ростка аналитического пространства $\{f=0\}$ (т. е. $\{x \in \mathbb{C}^n: f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\}$), кроме нулевой, отображение f имеет ранг, равный p , т. е. его дифференциал является эпиморфизмом, или, что то же самое, $\text{rk}(\partial f_i / \partial x_j) = p$. Отсюда следует, что вне нуля пространство $\{f=0\}$ является неособым $(n-p)$ -мерным комплексным многообразием.

Аналогично лемме 1 п. 2.1 нетрудно показать, что существует такое $\rho > 0$, что для всех $0 < r \leq \rho$ сфера $S_r \subset \mathbb{C}^n$ радиуса r с центром в нуле трансверсально пересекается с многообразием $\{f=0\}$. В этом случае для достаточно малых $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ ($\|z\| \leq \varepsilon_0$) пространство $\{f=z\}$ будет трансверсально пересекаться со сферой S_ρ . Пространство $\{f=z\}$, вообще говоря, не является неособым при $z \neq 0$. Множество (точнее — росток) Σ тех $z \in \mathbb{C}^p$ ($\|z\| \leq \varepsilon_0$), для которых пространство $\{f=z\}$ имеет внутри шара

B_ρ радиуса ρ с центром в нуле особые точки, называется дискриминантным множеством отображения f . Нетрудно видеть, что при $z \in \Sigma$ аналитическое пространство $\{f = z\}$ имеет внутри шара B_ρ только изолированные особенности. Из теоремы Сарда следует, что дополнение к множеству Σ всюду плотно в шаре $\{z: \|z\| \leq \leq \varepsilon_0\} \subset \mathbb{C}^p$. Для $z \notin \Sigma$ ($\|z\| \leq \varepsilon_0$) пространство $F_z = \{f = z\} \cap B_\rho = = \{x \in \mathbb{C}^n: \|x\| \leq \rho, f(x) = z\}$ является неособым $(n-p)$ -мерным комплексным многообразием с краем $\{f = z\} \cap S_\rho$. Для всех $z \notin \Sigma$, $\|z\| \leq \varepsilon_0$ многообразия F_z диффеоморфны между собой. Они называются неособыми многообразиями уровня отображения f .

Имеет место результат, аналогичный теореме 1 п. 2.1.

Теорема 4 ([160]). *Если росток отображения $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ определяет полное пересечение с изолированной особенностью в нуле, то неособое многообразие уровня F_z отображения f гомотопически эквивалентно букету нескольких сфер размерности $(n-p)$.*

Наметим основные идеи доказательства этой теоремы.

Для $p=1$ утверждение теоремы 4 следует из теоремы 1 п.2.1 и поэтому выполняется. Предположим, что оно уже доказано для отображений $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$, определяющих полные пересечения размерности $(n-p+1)$ с изолированными особенностями в нуле. Особые точки отображения $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, т. е. точки $x \in \mathbb{C}^n$, для которых $\text{rk}(\partial f_i / \partial x_j) < p$, образуют росток аналитического пространства S . Дискриминантное множество $(\Sigma, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ является образом ростка S при отображении f . Прообраз нуля при отображении $f|_S: S \rightarrow \mathbb{C}^p$ состоит из одной точки $0 \in \mathbb{C}^n$. Следовательно, отображение $f|_S$ является собственным (в достаточно малой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$), и поэтому росток дискриминантного множества Σ является ростком аналитического подпространства размерности (по крайней мере не больше, чем) $(p-1)$ в пространстве $(\mathbb{C}^p, 0)$. Отсюда вытекает, что для почти всех прямых $l \subset \mathbb{C}^p$, проходящих через нуль, пересечение $l \cap \Sigma$ имеет нуль изолированной точкой. Зафиксируем одну из таких прямых. Мы можем считать, что ε_0 выбрано столь малым, что внутри шара $\{\|z\| \leq \varepsilon_0\}$ в пространстве $\mathbb{C}^p$ пересечение $l \cap \Sigma$ состоит из одной точки $0 \in \mathbb{C}^p$. Сделав, если необходимо, линейную замену системы координат $z_1, \dots, z_p$ в пространстве $\mathbb{C}^p$, мы можем считать, что она выбрана так, что прямая l совпадает с координатной осью $z_1 = \dots = z_{p-1} = 0$. В этом случае подпространство $f^{-1}(l) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$, которое совпадает с нулевым многообразием уровня отображения $f' = (f_1, \dots, f_{p-1}): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$, является полным пересечением размерности $(n-p+1)$ с изолированной особой точкой в нуле. Мы показали, что почти все линейные замены системы уравнений $f_1 = \dots = f_p = 0$, определяющей полное пересечение размерности $(n-p)$ с изолированной особенностью в нуле, приводят к такой системе уравнений, что первые $(p-1)$ из них

($f_1 = \dots = f_{p-1} = 0$) также определяют полное пересечение (размерности $(n-p+1)$) с изолированной особенностью в нуле.

По предположению индукции для почти всех достаточно малых $z' = (z_1, \dots, z_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ множество $F' = F_{z'}' = (f')^{-1}(z') \cap B_p$ является неособым $(n-p+1)$ -мерным комплексным многообразием с краем и гомотопически эквивалентно букету нескольких сфер размерности $(n-p+1)$. Можно показать, что для достаточно малых z' вся нетривиальность гомотопического типа пространства $F_{z'}'$ сосредоточена в малой окрестности нуля. Более точно это означает, в частности, что для $\|z'\| \ll \varepsilon_p^0$ пространство $F' = F_{z'}'$ гомотопически эквивалентно своему подпространству $F'' = F' \cap \cap f_p^{-1}(\{|z_p| \leq \varepsilon_p^0\}) = \{x \in F' : f_p(x) \leq \varepsilon_p^0\}$. Для доказательства этого нужна некоторая аккуратность в проведении индукции, останавливаться на которой мы не будем.

Ограничение $f|_{F'}$ функции f_p на F' определяет отображение многообразия F' в комплексную прямую $\mathbb{C}$, обладающее свойствами, описанными в п.1.1 (с кругом $\{|z_p| \leq \varepsilon_p^0\}$ в качестве области U). Функция $f_p|_{F'}$, вообще говоря, может иметь вырожденные критические точки. Заменяя функцию $f_p|_{F'}$ на ее малое шевеление $\tilde{f}_p$, мы получим функцию на многообразии F' , также обладающую указанными свойствами. Мы можем считать, что на пространстве $\tilde{F}'' = \tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leq \varepsilon_p^0\})$ функция $\tilde{f}_p$ имеет только невырожденные критические точки в количестве v_0 штук с различными критическими значениями $z^{(1)}, \dots, z^{(v_0)}$, лежащими внутри круга $\{|z_p| < \varepsilon_p^0\}$. Пространство $\tilde{F}''$ диффеоморфно пространству F'' и поэтому имеет гомотопический тип букета нескольких сфер размерности $(n-p+1)$. Неособые многообразия уровня $\tilde{f}_p^{-1}(z_p)$ функции $\tilde{f}_p$ на многообразии F' диффеоморфны неособым многообразиям уровня функции $f_p|_{F'}$ (при $|z_p| \leq \varepsilon_p^0$), которые совпадают с неособыми многообразиями уровня отображения f .

Мы получили ситуацию, очень похожую на ту, которая рассматривалась при доказательстве теоремы 1 п.2.1. Роль функции $\tilde{f}$ на шаре B_p в пространстве $\mathbb{C}^n$ играет функция $\tilde{f}_p$ на многообразии F' . Над дополнением к множеству $\{z^{(1)}, \dots, z^{(v_0)}\}$ ее критических значений в круге $\{|z_p| \leq \varepsilon_p^0\}$ функция $\tilde{f}_p$ определяет локально тривиальное расслоение, слоями которого являются неособые многообразия уровня отображения f . Единственное отличие состоит в том, что прообраз круга $\{|z_p| \leq \varepsilon_p^0\}$ при отображении $\tilde{f}_p$ не стягиваем, а гомотопически эквивалентен букету нескольких (μ_1) сфер размерности $(n-p+1)$. Пусть $z^{(0)}$ — некритическое значение функции $\tilde{f}_p$ с $|z^{(0)}| = \varepsilon_p^0$, $\tilde{f}_p^{-1}(z^{(0)}) = F$, $\tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leq \varepsilon_p^0\}) = \tilde{F}''$ (пространство $\tilde{F}''$ гомотопически эквивалентно букету μ_1 сфер размерности $(n-p+1)$).

Выберем систему путей u_i ($i = 1, \dots, v_0$), соединяющих критические значения $z^{(1)}, \dots, z^{(v_0)}$ функции $\tilde{f}_p$ с некритическим зна-

чением $z^{(0)}$ и удовлетворяющих условиям, сформулированным в определении отмеченного базиса (п.1.2). Это означает, что пути u_i являются несамопересекающимися и не имеют общих точек, отличных от выбранного некритического значения $z^{(0)}$. Как и раньше, такая система путей определяет набор из v_0 исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_{v_0}$ в группе $H_{n-p}(F; Z)$ гомологий неособого многообразия уровня F отображения f . Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 п.2.1, мы получаем, что:

1) пространство $\tilde{F}'' = \tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leq \varepsilon_p^0\})$ гомотопически эквивалентно своему подпространству $X = \tilde{f}_p^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{v_0} \{u_i(t)\}\right)$, являющемуся прообразом объединения путей u_i ;

2) факторпространство $X/F = X/\tilde{f}_p^{-1}(z^{(0)})$ гомотопически эквивалентно букету v_0 сфер размерности $(n-p+1)$;

3) под действием граничного гомоморфизма $H_{n-p+1}(X/F) = H_{n-p+1}(X, F) \rightarrow H_{n-p}(F)$ пары (X, F) циклы, соответствующие этим сферам, переходят в классы гомологий исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_{v_0}$.

Отсюда следует односвязность неособого многообразия уровня F отображения f (при $(n-p) > 1$; при $(n-p) \leq 1$ доказательство теоремы 4 еще проще). Из общих утверждений о комплексных подмногообразиях в пространстве $\mathbb{C}^n$ вытекает, что группы $H_i(F; Z)$ гомологий пространства F являются нулевыми при $i > (n-p)$, а группа $H_{(n-p)}(F; Z)$ является свободной абелевой. Это следует, например, из того, что всякое неособое комплексное подмногообразие шара B_ρ в пространстве $\mathbb{C}^n$, имеющее (комплексную) размерность m , гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу (вещественной) размерности m . Это утверждение может быть доказано точно так же, как теорема Андреотти и Франкела в [78], отличающаяся тем, что комплексное многообразие рассматривается не в шаре B_ρ , а во всем пространстве $\mathbb{C}^n$.

Из точной гомологической последовательности пары (X, F) :

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(X) \rightarrow H_{i+1}(X, F) \rightarrow H_i(F) \rightarrow H_i(X) \rightarrow \dots$$

вытекает, что $H_i(F) = 0$ при $i \neq (n-p)$ и имеет место короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow H_{n-p+1}(X) \rightarrow H_{n-p+1}(X, F) \rightarrow H_{n-p}(F) \rightarrow 0,$$

в которой все группы являются свободными абелевыми. Отсюда следует, что неособое многообразие уровня F отображения f гомотопически эквивалентно букету $(v_0 - \mu_1)$ сфер размерности $(n-p)$, где μ_1 — ранг группы $(n-p+1)$ -мерных гомологий неособого многообразия уровня F' отображения $f' = (f_1, \dots, f_{p-1})$, а v_0 — количество критических точек функции f_p на многообразии F' (считая с их кратностями). Тем самым теорема 4 доказана.

По аналогии со случаем обычной особенности функции $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ число $\mu_0 = (v_0 - \mu_1)$, равное рангу группы $(n-p)$ -мерных

гомологий неособого многообразия уровня F ростка отображения $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ называется *числом Милнора* изолированной особенности ростка f .

При доказательстве теоремы 4 нами была построена короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow Z^{\mu_1} \rightarrow Z^{v_0} \rightarrow H_{n-p}(F; Z) \rightarrow 0,$$

где μ_1 — число Милнора изолированной особенности ростка $f' = (f_1, \dots, f_{p-1}): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$, получающегося из ростка f откидыванием одной из компонент (f_p) , v_0 — количество критических точек (с учетом кратностей) функции f_p на неособом многообразии уровня ростка отображения f' вблизи особой точки. Базис группы Z^{v_0} образуют (формальные) исчезающие циклы $\Delta_1, \dots, \Delta_{v_0}$, соответствующие путям $u_1, \dots, u_{v_0}$, описанным выше. Их индексы пересечений на неособом многообразии уровня F ростка f определяют билинейную форму на группе Z^{v_0} . Группа Z^{μ_1} совпадает с группой линейных соотношений между исчезающими циклами $\Delta_1, \dots, \Delta_{v_0}$ в группе $H_{n-p}(F)$ гомологий неособого многообразия уровня отображения f . Она, конечно, лежит в ядре формы, определяемой на группе Z^{v_0} индексами пересечений.

Натуральные числа μ_1 и v_0 , естественно, зависят от выбора системы координат $z_1, \dots, z_p$ в пространстве $\mathbb{C}^p$. Однако нетрудно видеть, что для системы координат $z_1, \dots, z_p$ общего вида числа μ_1 и v_0 зависят только от самого ростка $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$. Таким образом, для изолированной особенности ростка полного пересечения инвариантно определяется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow Z^{\mu_1} \rightarrow Z^{v_0} \rightarrow H_{n-p}(F) (= Z^{\mu_0}) \rightarrow 0.$$

Аналогичным образом для ростка $f': (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$ определена короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow Z^{\mu_2} \rightarrow Z^{v_1} \rightarrow Z^{\mu_1} \rightarrow 0$$

и далее — короткие точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z^{\mu_3} \rightarrow Z^{v_2} \rightarrow Z^{\mu_2} \rightarrow 0, \\ \vdots \\ 0 \rightarrow Z^{\mu_{n-p-1}} \rightarrow Z^{v_{n-p-2}} \rightarrow Z^{\mu_{n-p-2}} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow Z^{v_{n-p-1}} \xrightarrow{\sim} Z^{\mu_{n-p-1}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Все вместе они дают длинную точную последовательность (резольвенту)

$$0 \rightarrow Z^{v_{n-p-1}} \rightarrow Z^{v_{n-p-2}} \rightarrow \dots \rightarrow Z^{v_2} \rightarrow Z^{v_1} \rightarrow Z^{v_0} \rightarrow H_{n-p}(F; Z) \rightarrow 0,$$

состоящую из свободных абелевых групп. Здесь v_i — количество критических точек (считая с их кратностями) функции f_{p-i} на неособом многообразии уровня ростка отображения $(f_1, \dots, f_{p-i-1})$:

$(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-i-1}, 0)$ (при выборе системы координат общего вида в пространстве $(\mathbb{C}^p, 0)$).

Для ростка отображения, определяющего полное пересечение с изолированной особенностью, может быть определена его матрица пересечений как матрица пересечений исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_{v_0}$, определенных выше, а также — соответствующая диаграмма (для $n \equiv p \equiv 2 \pmod{4}$). Напомним, что циклы $\Delta_1, \dots, \Delta_{v_0}$ порождают группу $H_{n-p}(F; \mathbb{Z})$ $(n-p)$ -мерных гомологий неособого многообразия уровня, но не образуют в ней базиса. Поэтому всегда (кроме тривиального случая, когда полное пересечение, определяемое отображением $f' = (f_1, \dots, f_{p-1})$, является неособым, а потому полное пересечение, определяемое отображением f , изоморфно ростку гиперповерхности) матрица пересечений ростка такого отображения является вырожденной, а количество вершин в соответствующей диаграмме больше числа Милнора особенности.

5.4. Особенности проекций на прямую. Проекцией на прямую (или здесь просто проекцией) называется тройка $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$, где E — росток полного пересечения коразмерности p в пространстве $\mathbb{C}^n$, имеющий изолированную особую точку в нуле, $\pi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — линейная проекция вдоль гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-1} = \pi^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$. Две проекции $E_1 \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ и $E_2 \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ считаются эквивалентными, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_1 \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) & \rightarrow & (\mathbb{C}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2 \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) & \rightarrow & (\mathbb{C}, 0), \end{array}$$

в которой все вертикальные стрелки являются изоморфизмами в окрестности нуля.

Как всегда, особенность проекции $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ называется простой, если среди ее малых шевелений содержится конечное число проекций, различных относительно описанной эквивалентности. Простые особенности проекций описаны в [48]. Они существуют при $p=1$ и $p=2$. Для описания их представителей выберем в пространстве $\mathbb{C}^n$ такую систему координат $(x_1, \dots, x_n)$, что проекция π переводит точку $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ в $x_1 \in \mathbb{C}$. При $p=1$ простые особенности проекций существуют при всех $n \geq 2$. Они задаются уравнениями $f_1=0$ со следующими функциями $f_1(x_1, \dots, x_n)$ (здесь $q = x_3^2 + \dots + x_n^2$):

- A_0 : $f_1 = x_2$;
 X_μ : $f_1 = x_1 + X_\mu$, где X_μ — одна из простых особенностей функций от $(n-1)$ -й переменной $x_2, \dots, x_n$ (A_μ, D_μ или $E_\mu, \mu > 0$);
 B_μ : $f_1 = x_1^\mu + x_2^2 + q$ ($\mu \geq 2$);
 C_μ : $f_1 = x_1 x_2 + x_2^\mu + q$ ($\mu \geq 3$);
 F_4 : $f_1 = x_1^2 + x_2^3 + q$.

При $p=2$ простые особенности проекций существуют при $n=3$. Они задаются уравнениями $f_1=f_2=0$ со следующими функциями f_1 и f_2 :

$$\begin{aligned} C_{k+l}^{k,l}: f_1 &= x_2 x_3, & f_2 &= x_1 + x_2^k + x_3^l & (2 \leq k \leq l); \\ F_{2k+1}: f_1 &= x_2^2 + x_3^3, & f_2 &= x_1 + x_3^k & (k \geq 2); \\ F_{2k+4}: f_1 &= x_2^2 + x_3^3, & f_2 &= x_1 + x_2 x_3^k & (k \geq 1). \end{aligned}$$

Если зафиксировать линейную проекцию $\pi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ вдоль гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, то ростки полных пересечений E_1 и E_2 , входящие в эквивалентные особенности проекций $E_i \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($i=1, 2$), получаются друг из друга под действием локального аналитического изоморфизма $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, переводящего гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$ в себя. Таким образом, особенности проекции $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ соответствует росток полного пересечения E с изолированной особенностью в нуле, рассматриваемый с точностью до локального аналитического диффеоморфизма $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, переводящего гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ в себя. Поэтому особенности проекций являются обобщением и в некотором смысле — смешением краевых особенностей и особенностей ростков полных пересечений, рассмотренных соответственно в пп. 5.2 и 5.3.

В соответствии с пп. 5.2 и 5.3 для краевых особенностей (т. е. для изолированных особенностей ростков функций или гиперповерхностей в пространстве $(\mathbb{C}^n, 0)$, рассматриваемых с точностью до локальных аналитических изоморфизмов пространства $(\mathbb{C}^n, 0)$, сохраняющих гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$) и для изолированных особенностей ростков полных пересечений в пространстве $(\mathbb{C}^n, 0)$, как и для обычных особенностей функций, можно определить целочисленную решетку с целочисленной билинейной формой и выделенные (отмеченные) наборы элементов, порождающие ее. Отличие от обычных особенностей функций состоит в первом случае в том, что среди этих элементов имеются и «короткие» и «длинные» исчезающие циклы (при $n \equiv 3 \pmod{4}$ их индексы самопересечений равны (-2) и (-4) соответственно). Во втором случае отличие состоит в том, что набор этих элементов избыточен в том смысле, что их количество больше размерности решетки: они линейно зависимы в ней. Исходя из соображений, описанных в пп. 5.2 и 5.3, для особенности проекции $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ также определяется целочисленная решетка с целочисленной билинейной формой и выделенные наборы элементов, порождающие ее. При этом эти наборы обладают обоими указанными отличиями от случая обычных особенностей функций: они включают как короткие, так и длинные исчезающие циклы, и количество элементов в них больше размерности решетки.

Точная конструкция решетки и отмеченных наборов элементов в ней следующая. Пусть полное пересечение $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ опреде-

ляется набором уравнений $f_1 = f_2 = \dots = f_p = 0$ ($\dim E = n - p$). Сделав линейную замену общего вида этой системы уравнений, мы можем считать, что система уравнений $f_1 = f_2 = \dots = f_{p-1} = 0$ определяет полное пересечение размерности $(n - p + 1)$ с изолированной особенностью в нуле (см. п.5.3). Неособое многообразие уровня $F' = F'_z = \{f_1 = z_1, \dots, f_{p-1} = z_{p-1}\} \cap B_\rho$ имеет гомотопический тип букета сфер размерности $(n - p + 1)$, количество которых не зависит от конкретного выбора линейной замены системы уравнений общего вида. Пересечение этого многообразия уровня с гиперплоскостью $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ является неособым $(n - p)$ -мерным подмногообразием в многообразии F' (опять при общем выборе системы уравнений), а функция f_p определяет функцию на многообразии F' , имеющую изолированные критические точки. Заменяв, если это необходимо, функцию f_p на ее малое шевеление, можно считать, что она имеет на многообразиях F' и $F' \cap \mathbb{C}^{n-1}$ только невырожденные критические точки с различными критическими значениями. Для пары многообразий $(F', F' \cap \mathbb{C}^{n-1})$ и функции f_p на ней можно реализовать конструкцию, описанную в п.5.2 для пары $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-1})$. Это означает, что следует рассмотреть двулистное накрытие $\hat{F}'$ многообразия F' , ветвящееся вдоль подмногообразия $F' \cap \mathbb{C}^{n-1}$, и функцию $\hat{f}_p$, получающуюся из f_p поднятием на пространство накрытия. На многообразии уровня функции $\hat{f}_p$ действует инволюция, переставляющая листы накрытия. В группе целочисленных гомологий неособого многообразия уровня функции $\hat{f}_p$ выделяется подгруппа H^- , состоящая из классов гомологий, антиинвариантных относительно этой инволюции. Подгруппа H^- и является целочисленной решеткой, сопоставляемой особенности проекции $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Системе путей, соединяющих критические значения функции $\hat{f}_p$ с некритическим значением (и удовлетворяющей условиям, накладываемым на систему путей, определяющую отмеченный базис), соответствует система «обычных» исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\hat{f}_p$ на многообразии $\hat{F}'$: по два для каждого критического значения функции $f_p|_{F'}$ и по одному для каждого критического значения функции $f_p|_{F' \cap \mathbb{C}^{n-1}}$. Инволюция переставляет первые из них и действует на вторые умножением на (-1) . Разности циклов, соответствующих критическим значениям функции $f_p|_{F'}$, и циклы, соответствующие критическим значениям функции $f_p|_{F' \cap \mathbb{C}^{n-1}}$, порождают группу H^- антиинвариантных циклов в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\hat{f}_p$ на многообразии $\hat{F}'$. Этот набор циклов и следует рассматривать как отмеченный в целочисленной решетке H^- .

Поскольку многообразие F' (в отличие от пространства $\mathbb{C}^n$) имеет, вообще говоря, нетривиальные гомологии, количество этих циклов больше размерности решетки H^- (их количество равно

сумме размерностей решетки H^- и решетки, состоящей из антиинвариантных классов гомологий многообразия $\hat{F}'$). Индексы пересечений описанных циклов позволяют по тем же правилам, что и в п.5.2, определить соответствующую D -диаграмму. При этом надо иметь в виду, что эти правила определяют диаграмму по индексам пересечений исчезающих циклов при $n - p \equiv 2 \pmod{4}$.

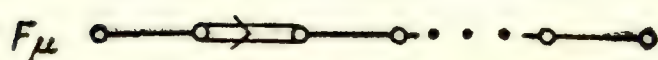


Рис. 51.

Поэтому при $p = 2$ ($n - p = 1$) следует формально проделать такой же пересчет матрицы пересечений, который происходит при добавлении к обычной особенности функции квадрата одной новой переменной (см. п.2.8), и дальше строить диаграмму так, как

если бы было $n - p \equiv 2 \pmod{4}$. В данном случае это означает, что i -я и j -я вершины соединены ребром кратности $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ (если хотя бы один из циклов Δ_i и Δ_j — короткий) или $(\Delta_i \circ \Delta_j)/2$ (если оба цикла — длинные) при $i < j$ (в соответствии с обычным порядком циклов $\{\Delta_k\}$ в отмеченном наборе); стрелки на ребрах направлены от вершин, соответствующих длинным исчезающим циклам, к вершинам, соответствующим коротким исчезающим циклам.

Нетрудно видеть, что простые особенности проекций на прямую с $p = 1$ имеют диаграммы, совпадающие с одноименными диаграммами обычных особенностей функций или краевых особенностей. Диаграммы особенностей проекций $C_{k+l}^{k,l}$ ($2 \leq k \leq l$) и F_{μ} ($\mu \geq 5$) имеют вид, изображенный на рис. 51 ([48]; нумерация вершин опущена).

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава посвящена исследованию асимптотик осциллирующих интегралов, т. е. интегралов вида

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n,$$

при больших значениях вещественного параметра τ . Здесь f и φ — гладкие функции. Функция f называется *фазой*, функция φ называется *амплитудой*. Согласно принципу стационарной фазы основной вклад в асимптотику дают окрестности критических точек фазы. В главе обсуждаются связи асимптотик с различными характеристиками критических точек фазы (разрешением особенностей, многогранниками Ньютона), излагаются методы вычисления асимптотик. В следующей главе обсуждаются связи асимптотик с монодромией и смешанными структурами Ходжа критических точек.

В последнее десятилетие теория особенностей исключительно тесно связана с исследованием осциллирующих интегралов. С одной стороны, многие разумные задачи теории особенностей возникли из попыток понять природу поведения интегралов. С другой стороны, многие из исследований критических точек нашли прямые приложения в исследованиях асимптотик. В качестве первого примера напомним, что классификация простых критических точек функции возникла как побочный продукт вычисления асимптотик простейших осциллирующих интегралов (см. [3, 4]). В качестве второго примера отметим связь асимптотик интегралов и смешанных структур Ходжа критических точек (см. главу III).

§ 6. Обсуждение результатов

6.1. Примеры, определения.

А. О с ц и л л и р у ю щ и е и н т е г р а л ы и к о р о т к о в о л н о в ы е к о л е б а н и я. Задачи оптики, акустики, квантовой механики, теории уравнений в частных производных, теории вероятностей, теории чисел приводят к необходимости исследовать осциллирующие интегралы при больших значениях параметра.

П р и м е р. Рассмотрим поверхность в трехмерном пространстве. Предположим, что каждая точка поверхности излучает сферическую волну фиксированной частоты и фиксированной длины.

Предположим, что длина волны мала по сравнению с размерами поверхности и со скоростью изменения амплитуды волны при изменении точки поверхности.

Суммарный колебательный режим в точке y пространства задается функцией
$$e^{2\pi i \omega t} \int_S \frac{e^{2\pi i \|x-y\|/\lambda}}{\|x-y\|} \varphi(x) dx,$$
 где t — время, ω —

частота, λ — длина волны, S — поверхность, излучающая волны, φ — амплитуда, dx — элемент площади поверхности. Таким образом, сложное колебание задается осциллирующим интегралом, в котором роль большого вещественного параметра играет величина, обратная к длине волны, а фазой служит функция расстояния от точки поверхности до фиксированной точки пространства. Основной вклад в сложное колебание (т. е. в осциллирующий интеграл) дают окрестности критических точек фазы. Если все критические точки фазы невырождены, то вклад в сложное колебание от каждой из них пропорционален длине волны. Если фаза имеет вырожденные критические точки, то вклад их малых окрестностей в сложное колебание еще больше, а именно, порядок вклада пропорционален длине волны в некоторой степени, меньшей чем 1. Как правило, функция на поверхности, равная расстоянию до фиксированной точки пространства, имеет только невырожденные критические точки. Точка пространства называется *каустической* или *фокальной*, если функция на поверхности, равная расстоянию до точки, имеет вырожденную критическую точку. Критические точки образуют в пространстве новую поверхность, называемую *каустикой*. В точках каустики сложное колебание имеет нестандартно большую величину. Если поверхность излучает световые волны, то каустика — это поверхность нестандартно ярких точек. Ее можно видеть на стене, освещенной лучами, отраженными от вогнутой поверхности (например, поверхности чашки). Каустику можно определить по-другому. Каустика — это множество критических значений экспоненциального отображения пространства нормального расслоения излучающей поверхности. Напомним определение экспоненциального отображения. Точкой пространства нормального расслоения является пара, состоящая из точки поверхности и приложенного в ней вектора, перпендикулярного к поверхности. Экспоненциальное отображение относит такой паре точку пространства, являющуюся конечной точкой вектора. Наконец, есть третье описание каустики. На нормали к излучающей поверхности отложим главные радиусы кривизны. Поверхность конечных точек всех таких отрезков является каустикой (см. [44]). Укажем еще один пример появления осциллирующих интегралов.

Одной из классических задач теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными является задача построения асимптотики по параметру решения задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными. Асимптотические методы

(см. [75—77]) приводят в этой задаче к следующему результату. Для любого натурального N в малой окрестности любой точки y^0 решение задачи Коши представимо в виде конечной суммы осциллирующих интегралов

$$\int e^{i\tau F(y, x)} \varphi(y, x, (i\tau)^{-1}) dx$$

и остаточного члена порядка $o(\tau^{-N})$ при $\tau \rightarrow +\infty$. В этом интеграле F — вещественнозначная функция, τ — большой параметр задачи, x — вещественные параметры, функция φ финитна по x и является полиномом по $(i\tau)^{-1}$. Поэтому вычисление асимптотики решения задачи Коши сводится к вычислению асимптотик осциллирующих интегралов.

Многочисленные примеры физических задач, в которых возникает необходимость исследования асимптотик интегралов, см. в работах М. Берри (M. Berry), Дж. Ни (J. Nye), цитированных в библиографии. Отметим также интересные статьи [246—248].

Б. Принцип стационарной фазы гласит: основной вклад в осциллирующий интеграл дают окрестности критических точек фазы.

Теорема 1. Пусть амплитуда осциллирующего интеграла имеет компактный носитель. Пусть фаза осциллирующего интеграла не имеет критических точек на носителе амплитуды. Тогда при стремлении параметра осциллирующего интеграла к $+\infty$ интеграл стремится к нулю быстрее любой степени параметра.

Доказательство. Пусть сначала интеграл одномерный. Проинтегрируем его по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau f(x)} \varphi(x) dx = \frac{-1}{i\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau f(x)} (\varphi(x)/f'(x))' dx.$$

Повторяя интегрирование достаточное число раз, получим теорему. Многомерный случай сводится к одномерному с помощью разбиения единицы и перехода к новым переменным интегрирования, в которых функция фазы — одна из переменных.

В. Интеграл Френеля. Осциллирующий интеграл, фаза которого имеет только невырожденные критические точки, называется *интегралом Френеля*.

Пример. Рассмотрим одномерный осциллирующий интеграл, фазой которого служит функция x^2 . На рис. 52 изображен график $y = \cos(\tau x^2)\varphi(x)$ вещественной части подынтегрального выражения осциллирующего интеграла. Ясно, что при больших значениях параметра τ интеграл пропорционален площади под первым витком

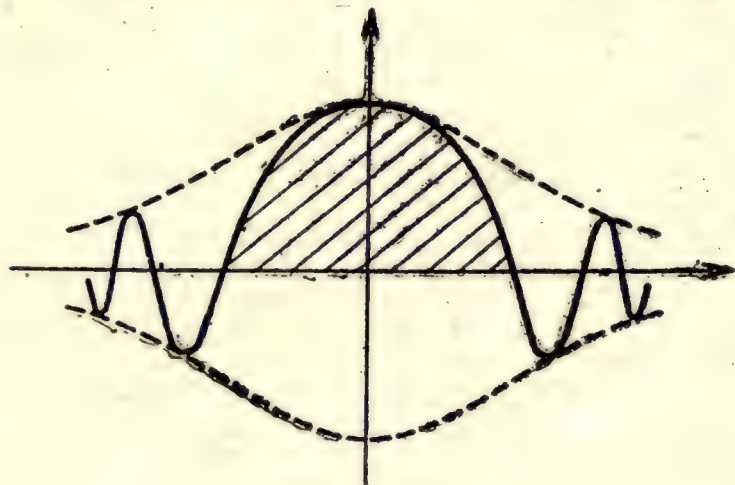


Рис. 52.

графика, т. е. пропорционален $\varphi(0)\tau^{-1/2}$. Точное вычисление показывает, что при стремлении параметра τ к $+\infty$ осциллирующий интеграл представим в виде

$$\varphi(0)\sqrt{\pi/\tau}\exp(i\pi/4)$$

и остаточного члена порядка $O(\tau^{-3/2})$ (см. [96]).

Рассмотрим многомерный интеграл Френеля

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\tau f(x)) \varphi(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Т е о р е м а 2 (см. [95, 96]). *Предположим, что фаза этого интеграла имеет невырожденную критическую точку в начале координат, а носитель амплитуды компактен и не содержит других критических точек фазы. Тогда при стремлении параметра интеграла к $+\infty$ интеграл представим в виде*

$$\varphi(0)(2\pi/\tau)^{n/2} \exp(i\tau f(0) + (i\pi/4) \operatorname{sign} f''_{xx}(0)) |\det f''_{xx}(0)|^{-1/2} + O(\tau^{-n/2-1}),$$

где $\operatorname{sign} f''_{xx}(0)$ — сигнатура матрицы вторых производных фазы в начале координат, $\det f''_{xx}(0)$ — определитель матрицы вторых производных фазы в начале координат.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме Морса фаза имеет вид $y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_n^2$ в подходящей системе координат в окрестности критической точки. Поэтому теореме достаточно доказать в этом случае. Этот случай с помощью теоремы Фубини легко сводится к утверждению предыдущего примера. Теорема доказана.

Г. К а у с т и к и. В приложениях, как правило, фазы и амплитуды осциллирующих интегралов зависят от дополнительных параметров. Рассмотрим такой интеграл. Предположим, что фаза является общим семейством функций, зависящих от дополнительных параметров (см. по этому поводу главу 2 ОДО-1). В этом случае интеграл является интегралом Френеля для почти всех значений параметров и при этих значениях имеет порядок $\tau^{-n/2}$ (теорема 2). Множество значений параметров, при которых фаза имеет вырожденную критическую точку, образует гиперповерхность в пространстве параметров. Эта гиперповерхность называется *каустикой*. При каустических значениях параметров порядок стремления интеграла к нулю определяется вырожденными критическими точками фазы.

Д. А с и м п т о т и к и о с ц и л л и р у ю щ и х и н т е г р а л о в в б л и з и к а у с т и к и. Предположим, что при выделенном значении дополнительных параметров фаза осциллирующего интеграла имеет единственную критическую точку и фаза, рассматриваемая как семейство функций, зависящих от параметров, является семейством функций общего положения. В этом случае

каустика в окрестности выделенного значения параметров называется *элементарной*.

Примеры элементарных каустик, встречающихся при числе параметров 2 и 3, изображены на рис. 53—56, где около каждой части каустик приведены типы вырожденных критических точек фазы, имеющих при этих каустических значениях параметров.



Рис. 53.

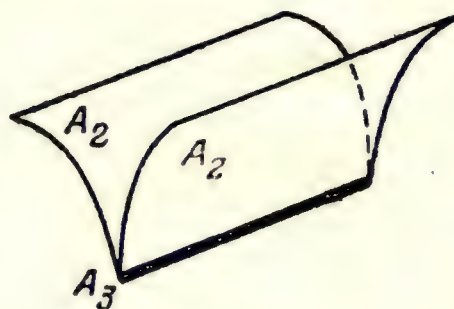


Рис. 54.

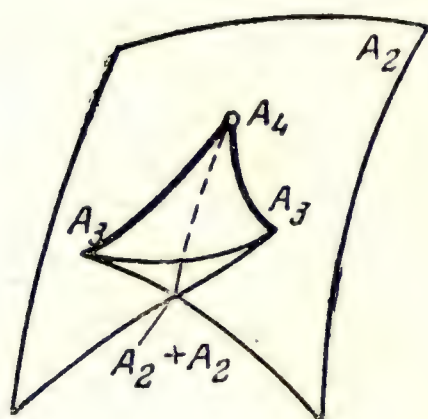


Рис. 55.

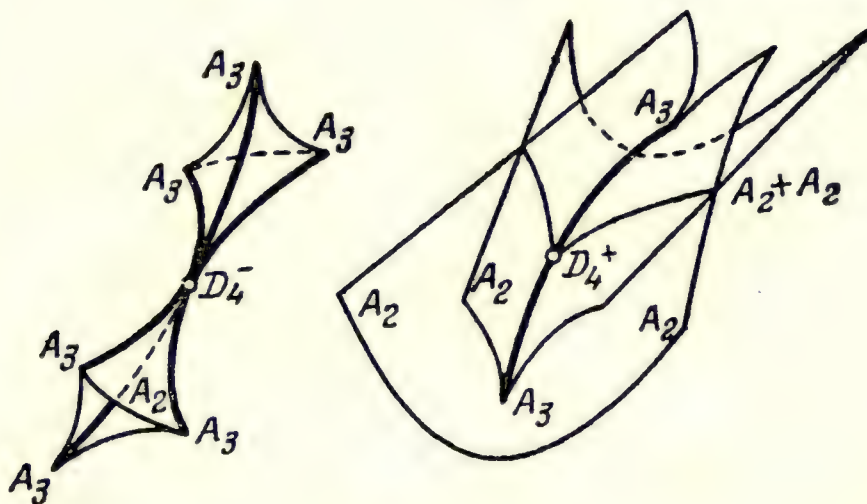


Рис. 56.

Например, $A_2 + A_2$ означает, что фаза имеет две критические точки типа A_2 , а остальные критические точки фазы невырождены. Каждая вырожденная критическая точка фазы дает в интеграл вклад порядка $\tau^{\beta - n/2}$. Число β для критических точек типов A_k , D_k равно, соответственно, $(k-1)/(2k+2)$, $(k-2)/(2k-2)$ (см. ниже теорему 4).

Согласно результатам главы III ОДО-1 для фаз, зависящих общим образом от двух или трех параметров, каждая элементарная каустика локально диффеоморфна одной из каустик, изображенных на рис. 53—56. Значениями параметров, переходящим друг в друга при локальном диффеоморфизме, отвечают интегралы равных порядков.

Предположим, что дополнительных параметров четыре и один из параметров выделен, мы будем называть его временем. Тогда в зависимости от времени каустики перестраиваются. Для семейств функций общего положения все возможные перестройки указаны на рис. 57—59. Классификация перестроек каустик выполнена В. М. Закалюкиным (см. главу III ОДО-1). Каждая перестройка имеет свое обозначение. Соответствующие этим обозначениям семейства приведены в п. 22.3 ОДО-1.

Отметим, что на рис. 58 (перестройка $A_3^2, +, +$) изображена единственная перестройка, для которой при положительном времени

каустика отсутствует, а при отрицательном времени она имеется. Согласно В. М. Закалюкину эта перестройка, возможно, объясняет феномен исчезновения «летающих тарелок».

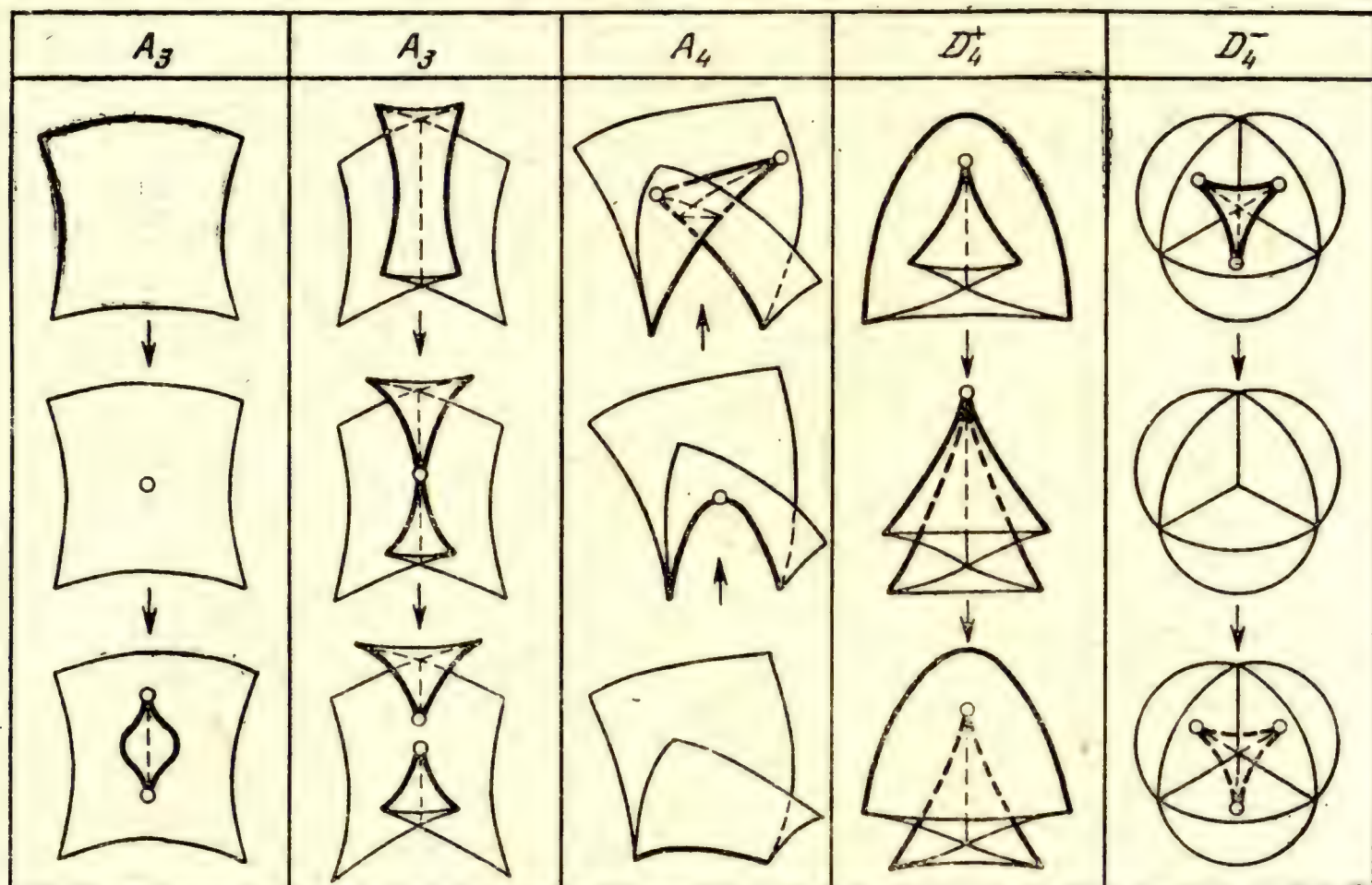


Рис. 57.

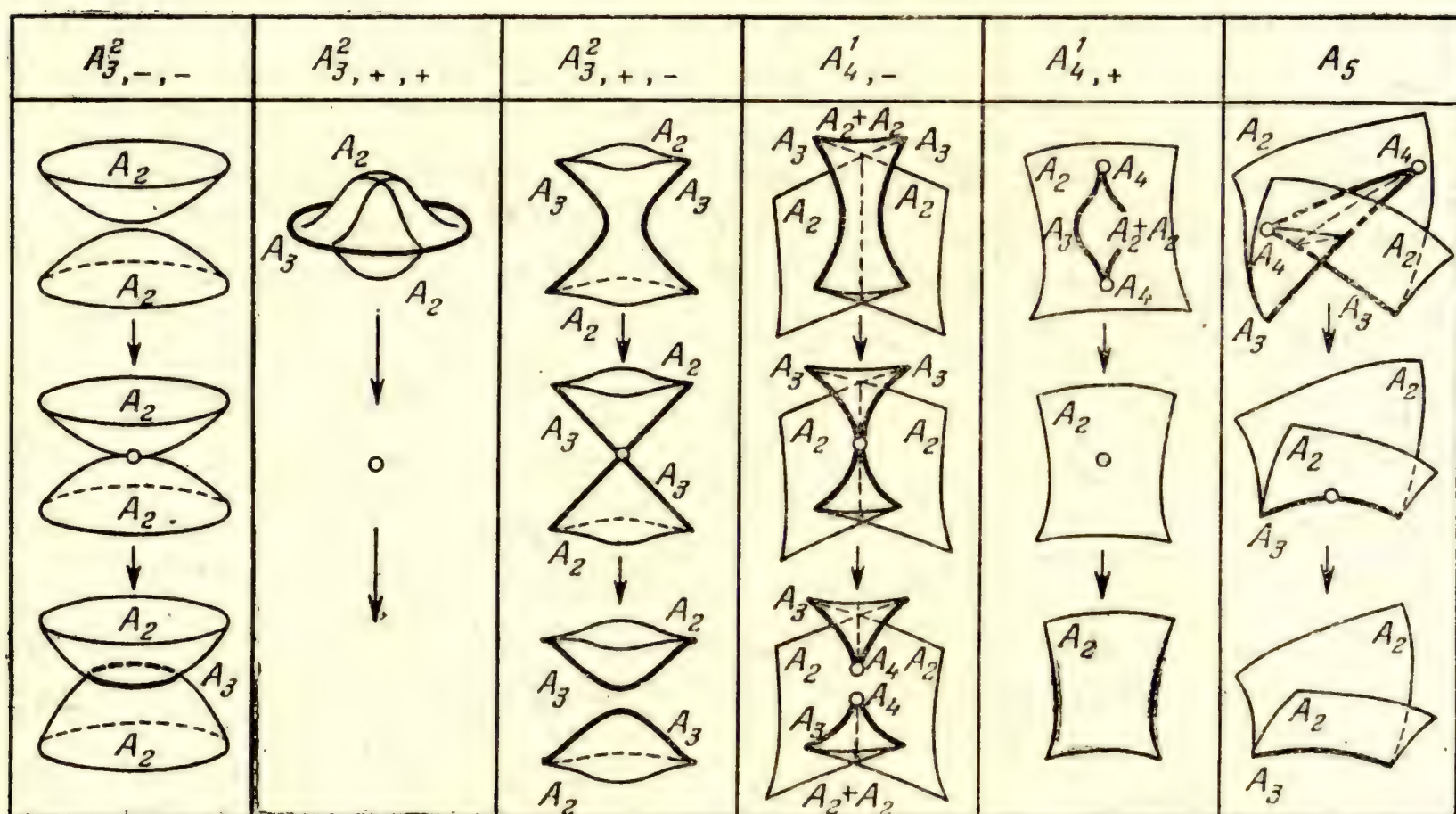


Рис. 58.

Е. Осциллирующие интегралы по полупространству. Вернемся к примеру пункта А. Предположим, что излучающая поверхность непрозрачна для испускаемых волн. Тогда в выделенную точку пространства приходят волны только от видимой части поверхности. Поэтому сложное колебание в точке пространства выражается суммой осциллирующих интегра-

лов, каждый из которых берется по части поверхности. Таким образом, при изучении коротковолновых колебаний полезно уметь вычислять асимптотики осциллирующих интегралов по области с границей. Мы разберем случай гладкой границы.

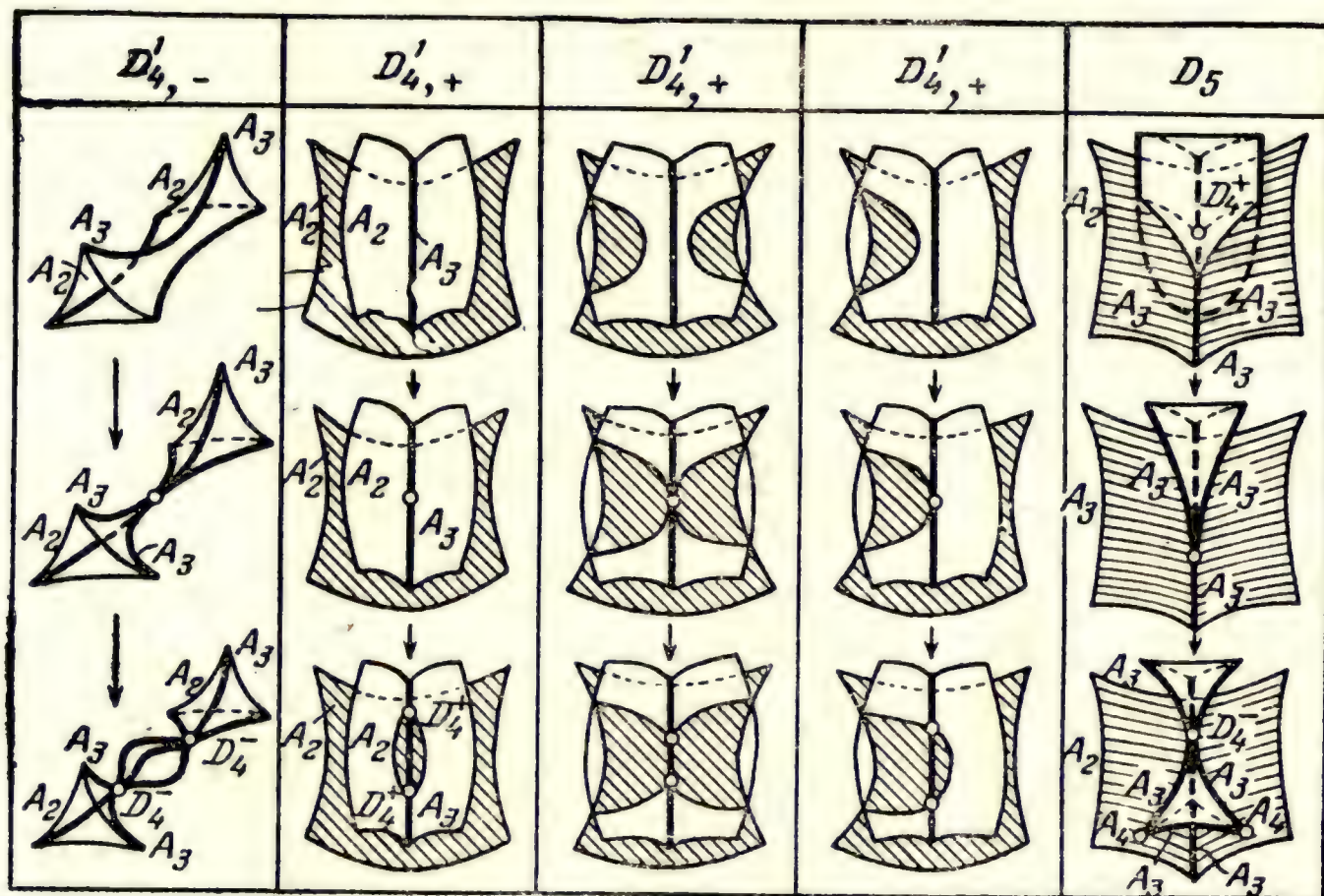


Рис. 59.

Рассмотрим осциллирующий интеграл по части пространства $\mathbb{R}^n$, заданной условием положительности первой координаты, при этом фазу и амплитуду интеграла будем считать гладкими функциями на всем пространстве.

Т е о р е м а 1'. Пусть амплитуда осциллирующего интеграла по полупространству имеет компактный носитель. Пусть фаза осциллирующего интеграла по полупространству не имеет критических точек на носителе амплитуды в области интегрирования. Пусть ограничение фазы на границу полупространства не имеет критических точек на носителе амплитуды. Тогда при стремлении параметра осциллирующего интеграла к $+\infty$ интеграл стремится к нулю быстрее любой степени параметра.

Д о к а з а т е л ь с т в о достаточно провести в случае, когда носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности точки границы полупространства. Изменив переменные интегрирования, перейдем к случаю, в котором полупространство интегрирования задается условием положительности первой переменной, а фаза есть вторая переменная. Далее, интегрируя по частям по второй переменной достаточное число раз, получим теорему.

Предположим, что фаза осциллирующего интеграла по полупространству не имеет критических точек на границе полупространства. Предположим, что все ее критические точки внутри полупространства невырождены и критические точки ее ограничения на границу полупространства интегрирования тоже невырождены.

Осциллирующий интеграл с такой фазой будем называть *интегралом Френеля по полупространству*.

Т е о р е м а 2'. Рассмотрим интеграл Френеля по полупространству, в котором первая координата положительна. Предположим, что начало координат не является критической точкой фазы, но является невырожденной критической точкой ограничения фазы на границу полупространства. Предположим, что носитель амплитуды компактен, не содержит критических точек фазы и не содержит других критических точек ограничения фазы на границу полупространства. Тогда при стремлении параметра интеграла к $+\infty$ интеграл представим в виде

$$\varphi(0) (i\tau)^{-1} (2\pi/\tau)^{(n-1)/2} \exp(i\tau f(0) + (i\pi/4) \operatorname{sign} \tilde{f}_{x',x'}''(0)) \times \\ \times |\det \tilde{f}_{x',x'}''(0)|^{-1/2} + O(\tau^{-(n+1)/2-1}),$$

где $\operatorname{sign} \tilde{f}_{x',x'}''(0)$ — сигнатура матрицы вторых производных в критической точке ограничения фазы на границу, $\det \tilde{f}_{x',x'}''(0)$ — определитель матрицы вторых производных в критической точке ограничения фазы на границу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В окрестности начала координат изменим первую переменную так, чтобы полупространство интегрирования, по-прежнему, задавалось условием ее положительности, а фаза интеграла приняла вид $x_1 + h(x_2, \dots, x_n)$. Теперь теорема 2 сводится к теореме 2 интегрированием по частям по первой переменной.

Предположим, что фаза и амплитуда осциллирующего интеграла по полупространству зависят от дополнительных параметров. Предположим, что фаза, рассматриваемая как семейство функций, зависящих от параметров, является семейством функций общего положения (см. главу II ОДО-1). В этом случае интеграл является интегралом Френеля для почти всех значений параметров. Те значения параметров, при которых интеграл не является интегралом Френеля, образуют гиперповерхность в пространстве параметров, называемую *каустикой*.

Предположим, что при выделенном значении параметров фаза имеет единственную критическую точку на границе полупространства интегрирования. Каустика в окрестности такого значения параметров называется *элементарной*.

Примеры элементарных каустик, встречающихся при числе параметров 2 и 3, изображены на рис. 60—64.

При каустическом значении параметров либо фаза имеет вырожденную критическую точку в полупространстве интегрирования, либо фаза имеет критическую точку на границе, либо ограничение фазы на границу имеет вырожденную критическую точку. На рисунках около каждой части каустики приведены обозначения этих критических точек. Нормальные формы критических точек, обозначенных на каустиках, см. в § 17 ОДО-1, а также в [8]. Каж-

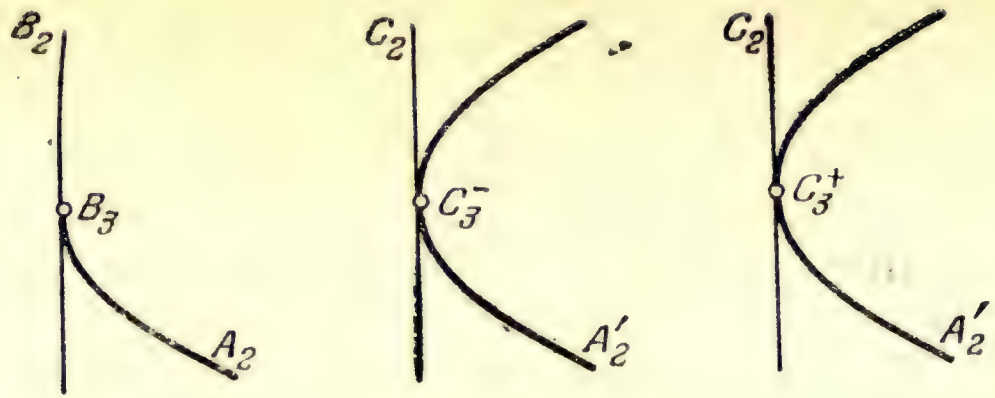


Рис. 60.

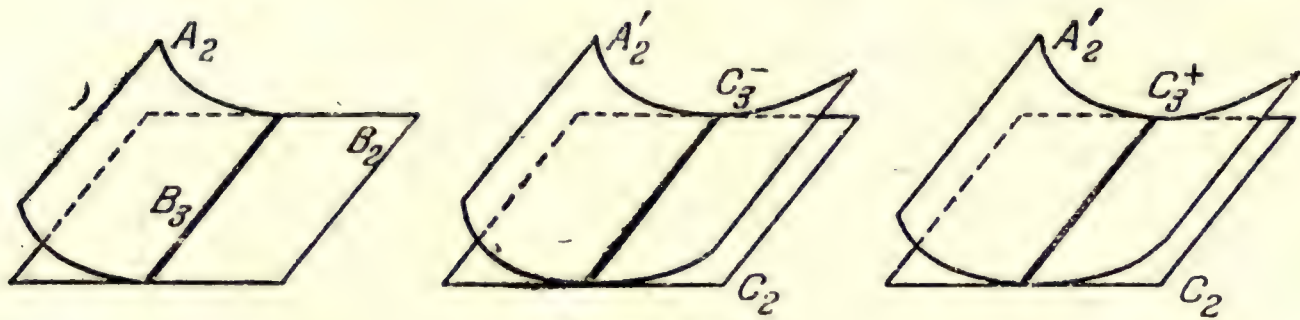


Рис. 61.

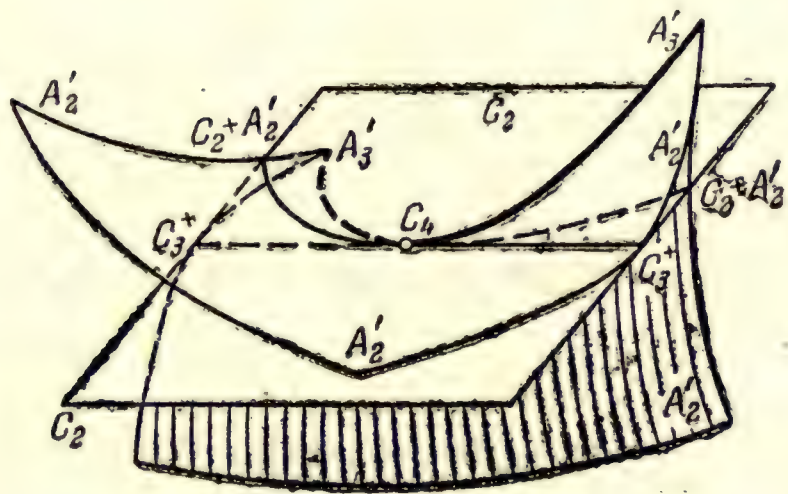


Рис. 62.

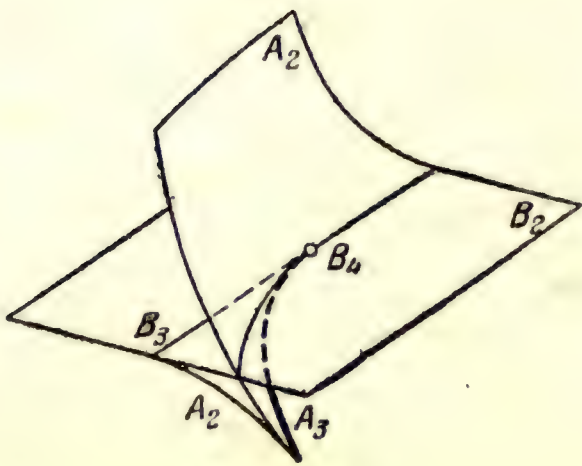


Рис. 63.

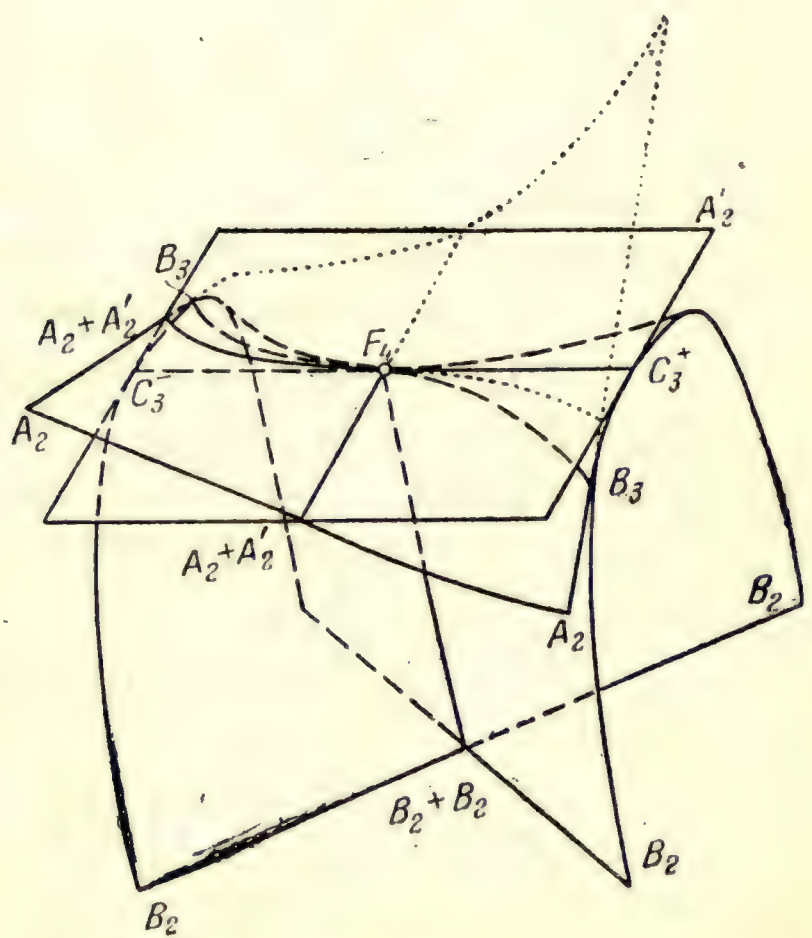


Рис. 64.

дая указанная критическая точка дает в интеграл вклад порядка $\tau^{\beta-n/2}$. Числа β для критических точек типов $A'_k, D'_k, B_k, C_k^\pm, F_4$ равны соответственно $-1/(k+1), -1/(2k-2), (k-1)/2k, 0, 1/6$ (см. ниже теорему 8.9).

Согласно [8] (см. также § 17 ОДО-1) для фаз осциллирующих интегралов по полупространству, зависящих общим образом от двух или трех параметров, каждая элементарная каустика локально диффеоморфна одной из каустик, изображенных на рис. 60—64. Значениям параметров, переходящим друг в друга при локальном диффеоморфизме, отвечают интегралы равных порядков.

Ж. З о н ы с в е т а, т е н и, п о л у т е н и (по К. П. Мандрыкину). Предположим, что фаза и амплитуда осциллирующего интеграла зависят от дополнительных параметров. Рассмотрим пространство параметров и расположенную в нем каустик. Рассмотрим произвольное значение параметров вне каустики. Фаза осциллирующего интеграла, отвечающего этому значению параметров, имеет только невырожденные критические точки, либо вообще не имеет критических точек. В первом случае осциллирующий интеграл имеет порядок $\tau^{-n/2}$, где n — размерность пространства интегрирования; во втором случае осциллирующий интеграл при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени параметра τ . В соответствии с этими случаями область вне каустики назовем

зоной света, если значениям параметров из этой области отвечают осциллирующие интегралы, фазы которых имеют хотя бы одну критическую точку;

зоной тени, если значениям параметров из этой области отвечают осциллирующие интегралы, фазы которых не имеют ни одной критической точки.

П р и м е р. На рис. 54—56 изображены каустики, отвечающие критическим точкам типов $A_2, A_3, A_4, D_4^\pm$. На рисунках каустик, отвечающих A_2, A_4, D_4^+ , зоны тени расположены под каустиками. Остальные области вне каустик, изображенных на рисунке, — зоны света.

Предположим теперь, что наш осциллирующий интеграл есть интеграл по полупространству. Рассмотрим произвольное значение параметров вне каустики. Имеются три возможности:

1) Фаза осциллирующего интеграла, отвечающего выделенному значению параметров, имеет хотя бы одну критическую точку в полупространстве интегрирования. В этом случае интеграл имеет порядок $\tau^{-n/2}$.

2) Фаза осциллирующего интеграла, отвечающего выделенному значению параметров, не имеет критических точек в полупространстве интегрирования, однако ограничение фазы на границу полупространства интегрирования имеет хотя бы одну критическую точку. В этом случае интеграл имеет порядок $\tau^{-(n+1)/2}$ (теорема 2').

3) Как фаза осциллирующего интеграла, отвечающего выделенному значению параметров, не имеет критических точек в полупространстве интегрирования, так и ее ограничение на границу полупространства интегрирования не имеет критических точек. В этом случае интеграл при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени параметра τ .

В соответствии с этими тремя возможностями области вне каустики назовем *зонами света, полутени, тени* соответственно.

П р и м е р. На рис. 61—64 изображены каустики, отвечающие критическим точкам типов B_3 , $C_3^\pm$, C_4 , B_4 , F_4 . Укажем зоны тени и полутени на этих рисунках, остальные области вне каустик — зоны света.

На рис. 61, *а* зона полутени — над каустикой. На рис. 61, *б* зона полутени — под каустикой. На рис. 61, *в* зона тени — над каустикой; зона полутени — между двумя листами каустики. На рис. 62 полутень — с одной из сторон плоскости каустики. На рис. 63 полутень — справа над плоскостью каустики. На рис. 64 тень — над всей каустикой; полутень — за каустикой под плоскостью каустики; полутень также — справа между плоскостью каустики и линейчатой поверхностью (третьей частью каустики).

Интересно, существуют ли критические точки, вне каустик которых лежат две зоны тени? Вероятно, зоны тени обладают какими-то свойствами выпуклости.

3. Т е о р е м а 3 (об асимптотическом разложении; см. [12, 13, 18, 125, 185]). *Рассмотрим осциллирующий интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\tau f(x)) \varphi(x) dx_1 \dots dx_n. \quad (1)$$

Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки x^0 . Тогда осциллирующий интеграл разлагается в асимптотический ряд

$$\exp(i\tau f(x^0)) \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi) \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности этой критической точки фазы. Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. Числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды. Носитель каждой такой обобщенной функции лежит в критическом множестве фазы.

П р и м е р (см. [96]). Рассмотрим интеграл Френеля. Предположим, что фаза интеграла имеет невырожденную критическую точку в начале координат, а носитель амплитуды компактен и не содержит других критических точек фазы. Тогда при стремлении

параметра к $+\infty$ интеграл разлагается в асимптотический ряд

$$\exp(i\tau f(0)) \tau^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \tau^{-j}.$$

Число a_j равно линейной комбинации $2j$ -ых смешанных производных амплитуды в начале координат. Число a_0 указано в теореме 2.

З а м е ч а н и е. В теореме 3 условие аналитичности фазы выполняется практически всегда: фаза есть полином в подходящих координатах в окрестности конечнократной критической точки. Бесконечнократных критических точек очень мало: коэффициенты ряда Тейлора бесконечнократной критической точки удовлетворяют бесконечному множеству независимых алгебраических соотношений.

Мы приведем два доказательства теоремы 3. Одно, основанное на теореме Хиронака о разрешении особенностей, изложено в § 7. Другое доказательство, использующее комплексно-аналитические рассуждения, см. в § 11.

В асимптотическом ряде осциллирующего интеграла фаза и амплитуда неравноправны: фаза определяет показатели степеней параметра, а амплитуда определяет коэффициенты при степенях параметра. Зависимость от фазы более существенна. Как правило, при исследовании осциллирующего интеграла фазу фиксируют, разрешая амплитуде меняться. В примере пункта А об излучении волн поверхностью фаза отвечает за геометрию излучающей поверхности, а амплитуда отвечает за интенсивность излучения.

И. Показатель осцилляции и показатель особенности. Основными характеристиками асимптотического ряда осциллирующего интеграла являются показатель степени параметра в максимальном члене ряда, степень логарифма параметра в максимальном члене ряда, числовой коэффициент максимального члена ряда, наконец, множество всех показателей степеней параметра, встречающихся в ряде.

О п р е д е л е н и я. *Множеством показателей аналитической фазы в критической точке* называется множество всех чисел α , обладающих свойством: для любой окрестности критической точки найдется амплитуда с носителем в этой окрестности, для которой в асимптотическом ряде (2) найдется число k со свойством: коэффициент a_k, α не равен нулю. *Показателем осцилляции аналитической фазы в критической точке* называется максимальное число в множестве показателей. Показатель осцилляции обозначается через β . *Кратностью показателя осцилляции аналитической фазы в критической точке* называется максимальное число k , обладающее свойством: для любой окрестности критической точки найдется амплитуда с носителем в этой окрестности, для которой в асимптотическом ряде (2) коэффициент a_k, β не равен нулю. Кратность показателя осцилляции обозначается через K .

П р и м е р. Множество показателей фазы n переменных в невырожденной критической точке есть множество всех чисел вида $-n/2-l$, где $l=0, 1, \dots$. Показатель осцилляции этой критической точки равен $-n/2$, его кратность равна нулю.

Показатель осцилляции и его кратность обладают следующим простым свойством. Пусть $f(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_l)$ — аналитические функции, имеющие критические точки в началах координат. Тогда для функции $f(x_1, \dots, x_n) + g(y_1, \dots, y_l)$ показатель осцилляции в начале координат и его кратность равны соответственно сумме показателей осцилляции и сумме кратностей показателей осцилляции критических точек функций f и g : $\beta(f+g) = \beta(f) + \beta(g)$, $K(f+g) = K(f) + K(g)$ (это — следствие теоремы Фубини, см. § 9). Аддитивность показателя осцилляции и его кратности мотивирует следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Показателем особости аналитической фазы n переменных в критической точке называется увеличенный на $n/2$ показатель осцилляции в этой критической точке. Кратностью показателя особости называется кратность показателя осцилляции.

Показатель особости и его кратность равны нулю в невырожденной критической точке фазы. Показатель особости и его кратность равны в стабильно эквивалентных критических точках.

К. Т а б л и ц ы п о к а з а т е л е й о с о б о с т и. В этой главе вычисляются (в перечисленных ниже случаях) основные характеристики критической точки фазы осциллирующего интеграла: показатель осцилляции, его кратность, множество показателей, указывается, при каких амплитудах старший член асимптотического ряда отличен от нуля. Утверждения, доказанные в этой главе, позволяют вычислить показатели особости и их кратности для всех критических точек, расклассифицированных в главе 2 ОДО-1. А именно, для всех простых, унимодальных и бимодальных критических точек, для всех критических точек кратности, меньшей чем 16, для всех критических точек, состоящих в классах коразмерности, меньшей 10, см. § 15 ОДО-1.

Результаты вычислений сведены в таблицы 1—5. В первой строке таблиц стоят обозначения типов критических точек фазы. Соответствующие этим обозначениям нормальные формы критических точек указаны в пп. 15.1, 17.1 ОДО-1. Во второй строке таблиц стоят показатели особости. Смысл наших таблиц таков: если

Т а б л и ц а 1. Простые особенности

A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
$\frac{k-1}{2k+2}$	$\frac{k-2}{2k-2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{15}$

Таблица 2. Унимодальные особенности

$$P_8, X_9, J_{10}, J_{10+k}, X_{9+k}, Y_{r,s}, \tilde{Y}_r, P_{8+k}, R_{l,m}, \tilde{R}_m, T_{p,q,r}, \tilde{T}_{p,m}$$

$\frac{1}{2}$									
E_{12}	E_{13}	E_{14}, Q_{10}	Z_{12}	Z_{13}, Q_{11}	W_{12}	W_{13}, S_{11}	Q_{12}	S_{12}	U_{12}
$\frac{11}{21}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{7}{12}$

Таблица 3. Бимодальные особенности

$J_{3,0}$ $J_{3,p}$	$Z_{1,0}, E_{19}$ $Z_{1,p}$	$W_{1,0}, W_{1,2q-1}^\#, Q_{2,0}, Z_{17}$ $W_{1,p}, W_{1,2q}^\#, Q_{2,p}$	$S_{1,0}, S_{1,2q-1}^\#, W_{17}$ $S_{1,p}, S_{1,2q}^\#, Q_{17}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$

S_{17}	$U_{1,0}, U_{1,2q-1}, U_{1,2q}$	E_{18}	E_{20}	Z_{18}	Z_{19}	W_{18}	Q_{16}	Q_{18}	S_{16}	U_{16}
$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{25}{42}$	$\frac{29}{48}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{19}{30}$

Таблица 4. Особенности коранга 2 с ненулевой 4-струей

$J_{k,0}, J_{k,i}$	E_{6k}	E_{6k+1}	E_{k+2}	$X_{k,0}, X_{k,p}, Y_{r,s}^k$
$\frac{2k-1}{3k}$	$\frac{6k-1}{9k+3}$	$\frac{4k}{6k+3}$	$\frac{6k+1}{9k+6}$	$\frac{3k-1}{4k}$
$\left. \begin{array}{l} Z_{i,0}^k, Z_{i,p}^k, Z_{12k+6i-1}^k \\ Z_{12k+6i}^k, Z_{12k+6i+1}^k \end{array} \right\} \text{при } k > 2$				$\left. \begin{array}{l} Z_{i,0}^2 \\ Z_{i,p}^2 \end{array} \right\}$
$\frac{3k-1}{4k}$				$\frac{2i+5}{3i+8}$

Z_{23+6i}^2	Z_{24+6i}^2	Z_{25+6i}^2	$Z_{i,0}, Z_{i,p}$	Z_{6i+11}	Z_{6i+12}	Z_{6i+13}
$\frac{6i+17}{9i+27}$	$\frac{4i+12}{6i+19}$	$\frac{6i+19}{9i+30}$	$\frac{2i+2}{3i+4}$	$\frac{6i+8}{9i+15}$	$\frac{4i+6}{6i+11}$	$\frac{6i+10}{9i+18}$
W_{12k}	W_{12k+1}	$W_{k,0}, W_{k,i}, W_{k,2q-1}^\#, W_{k,2q}^\#$		W_{12k+5}	W_{12k+6}	
$\frac{12k-1}{16k+4}$	$\frac{9k}{12k+4}$	$\frac{12k+2}{16k+8}$		$\frac{9k+3}{12k+8}$	$\frac{12k+5}{16k+12}$	

Т а б л и ц а 5. Особенности коранга 3 с приведенной 3-струей и 3-струей x^2y

$Q_{k,0}, Q_{k,i}$	Q_{6k+4}	Q_{6k+5}	Q_{6k+6}	S_{12k-1}	S_{12k}	
$\frac{4k-1}{6k}$	$\frac{12k+1}{18k+6}$	$\frac{8k+2}{12k+6}$	$\frac{12k+5}{18k+12}$	$\frac{12k-3}{16k}$	$\frac{18k-3}{24k+2}$	
$S_{k,0}, S_{k,2q-1}^\#$ $S_{k,i}, S_{k,2q}^\#$	S_{12k+4}	S_{12k+5}	U_{12k}	$U_{k,2q}$ $U_{k,2q-1}$	U_{12k+4}	$V_{1,0}, V_{1,2q-1}^\#$ $V_{1,p}, V_{1,2q}^\#$
$\frac{6k}{8k+2}$	$\frac{18k+3}{24k+10}$	$\frac{12k+3}{16k+8}$	$\frac{15k-1}{18k+6}$	$\frac{10k+1}{12k+6}$	$\frac{15k+4}{18k+12}$	$\frac{5}{8}$

в окрестности критической точки фаза приводится к табличному виду диффеоморфизмом пространства, то ее показатель особости равен показателю особости соответствующей табличной функции.

Для критических точек типов $J_{10+k}, X_{9+k}, Y_{r,s}, P_{8+k}^-, R_{l,m}, \tilde{R}_m^{+,-}, \tilde{R}_m^{-,+}, T_{p,q,r} (p^{-1}+q^{-1}+r^{-1} < 1), X_{1,p} (p > 0), Y_{r,s}^1, Z_{i,0}^3, Z_{35+6i}^3, Z_{36+6i}^3, Z_{37+6i}^3, Z_{i,p}^3$ кратность показателя особости равна 1, для всех остальных критических точек таблиц 1—5 кратность показателя особости равна 0. Для всех критических точек таблиц (кроме $P_{8+k}^+, \tilde{R}_m^{+,+}, \tilde{R}_m^{-,-}, \tilde{T}_{p,m}$) коэффициент $a_{k,\beta}$ старшего члена асимптотического ряда (2) равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы. Для критических точек типов $P_{8+k}^+, \tilde{R}_m^{+,+}, \tilde{R}_m^{-,-}, \tilde{T}_{p,m}$ то же утверждение справедливо о мнимой части коэффициента $a_{k,\beta}$.

Доказательства этих утверждений см. в § 9.

6.2. Формулировка результатов. Основные результаты главы формулируются в терминах многогранников Ньютона ряда Тейлора критической точки фазы. Многогранник Ньютона — это выпуклый многогранник, образованный показателями одночленов, присутствующих в ряде Тейлора. Мы рассматриваем класс критических точек с фиксированным многогранником Ньютона и доказываем, что почти все критические точки класса имеют единый показатель осцилляции. Мы доказываем формулу, выражающую этот общий показатель осцилляции через геометрию многогранника Ньютона. Исключение составляют критические точки, у которых коэффициенты ряда Тейлора удовлетворяют конечному множеству явно указанных алгебраических условий.

Класс критических точек с фиксированным многогранником Ньютона полезно рассматривать при изучении дискретных инвариантов критических точек. Как правило, инвариант принимает единое значение для почти всех точек класса, его общее значение просто выражается через геометрию многогранника Ньютона (см. пп. 6.2.Г, 3.5, а также [10, 11, 18, 29, 56, 59, 66, 67, 107—111, 162, 163, 171, 221, 231]).

А. Многогранник Ньютона. Рассмотрим положительный октант пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. множество точек с неотрицательными координатами. Определим многогранник Ньютона произвольного подмножества октанта, состоящего из точек с целыми координатами. В каждую точку подмножества перенесем параллельно положительный октант. *Многогранником Ньютона* называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ объединения всех построенных октантов. Многогранник Ньютона является выпуклым многогранником с вершинами в точках с неотрицательными целыми координатами. Вместе с каждой точкой он содержит положительный октант, параллельно перенесенный в эту точку. *Диаграммой Ньютона подмножества* называется объединение всех компактных граней его многогранника Ньютона.

Рассмотрим степенной ряд $f = \sum a_k x^k$ с вещественными или комплексными коэффициентами, здесь $k = (k_1, \dots, k_n)$, $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. *Носителем ряда* называется множество показателей всех одночленов, входящих в ряд с ненулевыми коэффициентами. Носитель ряда является подмножеством положительного октанта, состоящим из точек с неотрицательными целыми координатами. Выбросим из носителя начало координат (если оно входит в носитель). Полученное множество называется *приведенным носителем ряда*. *Многогранником Ньютона степенного ряда* называется многогранник Ньютона его приведенного носителя. *Диаграммой Ньютона степенного ряда* называется диаграмма Ньютона его приведенного носителя.

Многогранник Ньютона обозначается через Γ , диаграмма Ньютона обозначается через Δ .

Пример. Для функций $f = (x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^5$, $g = (x_1^2 - x_2^2)^2$, $h = (x_1 + x_2)^2 x_1^2 + x_1^5 + x_2^5$ многогранники Ньютона и диаграммы Ньютона рядов Тейлора в начале координат изображены на рис. 65.

Для любой грани γ многогранника Ньютона степенного ряда γ -частью этого степенного ряда называется степенной ряд, составленный из одночленов, показатели которых принадлежат грани γ ; при этом каждый одночлен входит с тем коэффициентом, с каким

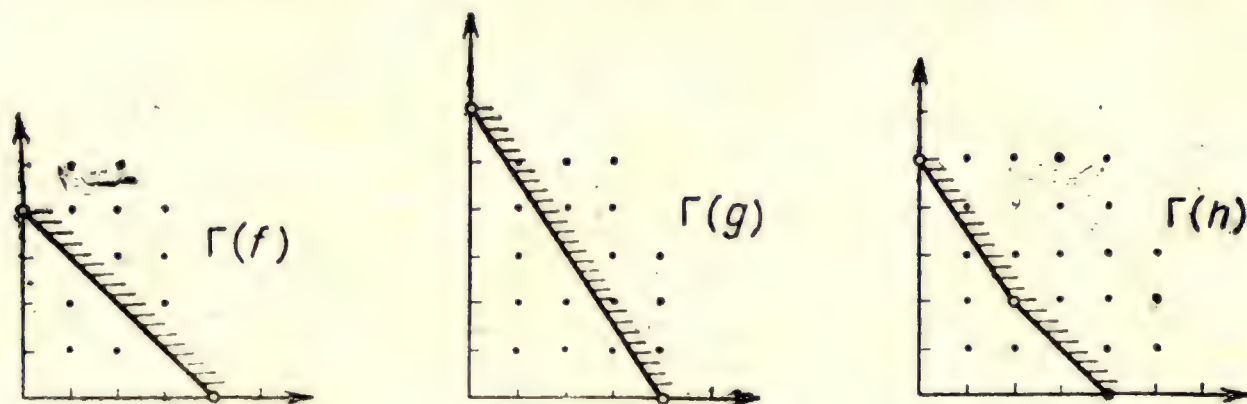


Рис. 65.

он входит в исходный степенной ряд. Если грань γ компактна, то γ -часть — многочлен. Главной частью степенного ряда называется многочлен, составленный из одночленов, показатели которых принадлежат диаграмме Ньютона степенного ряда; при этом одночлены входят с теми коэффициентами, с которыми они входят в исходный степенной ряд. γ -часть ряда f обозначается через f_γ , главная часть ряда обозначается через f_Δ .

Пример. Для функций предыдущего примера главными частями рядов Тейлора являются многочлены $f_\Delta = (x_1^2 + x_2^2)^2$, $g_\Delta = (x_1^2 - x_2^2)^2$, $h_\Delta = (x_1 + x_2)^2 x_1^2 + x_1^5$.

Б. Невырожденность главной части. Определим понятие невырожденности главной части степенного ряда. В дальнейшем мы увидим, что функции, ряды Тейлора которых имеют невырожденную главную часть, обладают хорошими свойствами: их дискретные характеристики просто выражаются через геометрию их многогранников Ньютона; см. п. 6.2.Г.

Определение (см. [66, 171]). Главная часть степенного ряда f с вещественными коэффициентами (соответственно — степенного ряда с комплексными коэффициентами) называется $\mathbb{R}$ -невырожденной (соответственно $\mathbb{C}$ -невырожденной), если для любой компактной грани γ многогранника Ньютона ряда многочлены $\partial f_\gamma / \partial x_1, \dots, \partial f_\gamma / \partial x_n$ не имеют общих нулей в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ (соответственно в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$).

Пример. Все главные части предыдущего примера $\mathbb{C}$ -вырождены, главная часть f_Δ $\mathbb{R}$ -невырождена, главные части g_Δ , h_Δ $\mathbb{R}$ -вырождены.

Замечание. Для любой компактной грани γ многочлен γ -части квазиоднороден. По теореме Эйлера об однородных функциях общие нули в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ всех первых частных производных много-

члена γ -части лежат на многообразии нулевого уровня многочлена γ -части.

Следующая лемма показывает, что рядов с вырожденными главными частями мало.

Л е м м а 1 (см. [66, 171]). *Множество $\mathbb{R}$ -вырожденных (соответственно $\mathbb{C}$ -вырожденных) главных частей является собственным полуалгебраическим (соответственно конструктивным) подмножеством в пространстве всех главных частей, отвечающих данному многограннику Ньютона, дополнение к которому всюду плотно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для фиксированной компактной грани γ многогранника Ньютона докажем, что в пространстве многочленов, являющихся γ -частью, полуалгебраическое подмножество составляют те многочлены, у которых многообразие нулевого уровня имеет особые точки в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$, и дополнение к нему всюду плотно.

Полуалгебраичность гарантирует теорема Тарского—Зайденберга (см. [46, 216]). Докажем плотность дополнения. Многообразие нулевого уровня задается уравнением $\sum_{k \in \gamma} c_k x^k = 0$. Выделим один из этих мономов. Тогда многообразие нулевого уровня в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ можно задать уравнением

$$c_{k_0} = - \sum_{k \in \gamma \setminus k_0} c_k x^{k-k_0}.$$

По теореме Бертини — Сарда только конечное множество значений коэффициента c_{k_0} (при фиксированных остальных коэффициентах) отвечает особому многообразию нулевого уровня. Лемма доказана.

В. Расстояние до многогранника и удаленность многогранника. При исследовании осциллирующих интегралов используются геометрические характеристики многогранника Ньютона, называемые расстоянием до многогранника и удаленностью многогранника. Рассмотрим биссектрису положительного октанта в $\mathbb{R}^n$, т. е. прямую, состоящую из точек с равными координатами. Биссектриса пересекается с границей многогранника Ньютона ровно в одной точке. Эта точка называется *центром границы* многогранника Ньютона. Координата центра (с произвольным номером) называется *расстоянием до многогранника Ньютона*. *Удаленностью многогранника Ньютона* называется взятая с минусом величина, обратная к расстоянию.

П р и м е р. Для функций f, g, h примера на стр. 139 расстояния до многогранников Ньютона равны соответственно 2, 12/5, 2, удаленности многогранников Ньютона равны соответственно $-1/2$, $-5/12$, $-1/2$.

Чем дальше от начала координат расположен многогранник Ньютона, тем больше его удаленность. Назовем многогранник Ньютона *далеким*, если его удаленность больше -1 . Другими

словами, многогранник Ньютона далекий, если ему не принадлежит точка $(1, \dots, 1)$.

Рассмотрим открытую грань, которой принадлежит центр грани многогранника Ньютона. Уменьшенная на 1 коразмерность этой грани называется *кратностью удаленности*. В частности, если указанная грань есть вершина многогранника, то кратность равна $n-1$, если указанная грань есть ребро многогранника, то кратность равна $n-2$, и т. д.

Пример. Для функций f, g, h примера на стр. 139 кратность удаленности их многогранников Ньютона равна соответственно 0, 0, 1.

Г. Формулировка основного результата. Основной результат главы гласит: показатель осцилляции критической точки фазы определяется удаленностью многогранника Ньютона ее ряда Тейлора (при условиях, сформулированных в следующих двух теоремах).

Теорема 4 (см. [18]). Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки. Предположим, что главная часть ряда Тейлора фазы в этой критической точке $\mathbb{R}$ -невырождена и многогранник Ньютона этого ряда далекий. Тогда показатель осцилляции критической точки фазы равен удаленности многогранника Ньютона.

Пример 1. Вырожденная критическая точка в начале координат фазы $x_1^{k_1} + x_2^{k_2}$ удовлетворяет условиям теоремы. Ее показатель осцилляции равен $-1/k_1 - 1/k_2$.

Пример 2. Критическая точка в начале координат фазы f примера на стр. 139 удовлетворяет условиям теоремы. Ее показатель осцилляции равен $-1/2$.

Следующие утверждения дополняют теорему.

а) Пусть выполнены условия теоремы; тогда кратность показателя осцилляции критической точки фазы равна кратности удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в этой критической точке.

б) Если главная часть ряда Тейлора критической точки фазы $\mathbb{R}$ -невырождена, то показатель осцилляции критической точки не больше удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора.

в) Рассмотрим критическую точку в начале координат фазы $x_4^2 + x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))x_5$. Тогда главная часть ряда Тейлора критической точки $\mathbb{R}$ -невырождена; удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора меньше -1 ; показатель осцилляции критической точки меньше удаленности многогранника Ньютона.

г) Если многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки фазы далекий, то показатель осцилляции критической точки фазы не меньше удаленности многогранника.

д) Если многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки фазы далекий и эта критическая точка конечнократно, то коэф-

фициент при старшем члене асимптотического ряда осциллирующего интеграла (коэффициент $a_{k, \nu}$ ряда (2) на стр. 133) равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы.

е) Пусть главная часть ряда Тейлора критической точки фазы $\mathbb{R}$ -невырождена и удаленность многогранника Ньютона равна -1 . Тогда показатель осцилляции критической точки фазы равен -1 , если выполнено хотя бы одно из двух условий:

открытая грань, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона, имеет размерность меньше $n-1$;

замыкание γ открытой грани, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона, компактно, и γ -часть ряда Тейлора имеет нули на $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.

ж) Если выполнены предположения дополнения е), то кратность показателя осцилляции критической точки фазы равна кратности удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора или на 1 меньше кратности удаленности.

Теорема 4 и дополнения а), б), г), д), е), ж) доказаны в § 8, дополнение в) доказано в § 9.

Согласно теореме 4 показатель осцилляции критической точки фазы можно выразить через многогранник Ньютона ее ряда Тейлора, если главная часть ряда Тейлора $\mathbb{R}$ -невырождена и многогранник Ньютона ряда Тейлора далекий. Система координат, в которой ряд Тейлора обладает такими свойствами, существует не всегда. Например, ее нет для критической точки в начале координат функции g примера на стр. 139. Тем не менее для критических точек функций двух переменных предположение о существовании указанной системы координат можно отбросить.

Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки. *Удаленностью критической точки фазы* называется верхняя грань удаленностей многогранников Ньютона рядов Тейлора фазы во всех системах локальных аналитических координат с началом в критической точке.

Локальная система аналитических координат с началом в критической точке фазы называется *приспособленной к критической точке*, если удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в этой системе координат имеет наибольшее возможное значение, равное удаленности критической точки.

Т е о р е м а 5 (см. [18]). *Пусть фаза — аналитическая функция двух переменных в окрестности своей критической точки. Тогда показатель осцилляции критической точки равен ее удаленности.*

Следующие утверждения дополняют теорему.

а) В условиях теоремы существует система координат, приспособленная к критической точке.

б) Если критическая точка фазы двух переменных конечнократна, то коэффициент при старшем члене асимптотического ряда осциллирующего интеграла (коэффициент $a_{k, \nu}$ ряда (2) на стр. 133)

равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы.

в) Показатель осцилляции больше удаленности для критической точки в начале координат фазы $(-x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^9 + x_2^9 + x_3^9$ трех переменных.

Теорема 5 и дополнения а), б) обсуждаются в п. 8.4, дополнение в) доказано в § 9 (см. также [18]).

В [18] описан алгоритм нахождения системы координат, приспособленной к критической точке фазы двух переменных. Для нахождения приспособленных координат полезна следующая лемма.

Л е м м а 2 (см. [18]). Локальная система координат с началом в критической точке фазы двух переменных приспособлена к критической точке, если выполнено хотя бы одно из следующих условий.

а) *Центр границы многоугольника Ньютона ряда Тейлора фазы в этой системе координат является вершиной многоугольника.*

б) *Центр границы многоугольника Ньютона лежит на некомпактном компактном ребре многоугольника.*

в) *Центр границы многоугольника Ньютона лежит на компактном ребре многоугольника, и ни тангенс, ни котангенс угла, образованного ребром и первой осью координат в $\mathbb{R}^2$, не равны целому числу (отметим, что перенумерация осей меняет тангенс с котангенсом и не влияет на выполнение сформулированного условия).*

П р и м е р. Рассмотрим функции g, h примера на стр. 139. Система координат x_1, x_2 приспособлена к критическим точкам этих функций (соответственно в силу пунктов в), а) леммы 2). По теореме 5 показатели осцилляции равны соответственно $-5/12, -1/2$.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение о том, что коэффициент при старшем члене асимптотического ряда пропорционален значению амплитуды в критической точке (см. дополнения теорем 4, 5), можно использовать при решении следующей задачи интегральной геометрии.

З а д а ч а. Пусть φ — гладкая функция с носителем, сосредоточенным в малой окрестности критической точки гладкой функции f . Зная интегралы функции φ по всем гиперповерхностям уровня функции f , восстановить значение функции φ в указанной критической точке.

Для решения этой задачи достаточно взять коэффициент при старшем члене асимптотического ряда осциллирующего интеграла с фазой f и амплитудой φ , если критическая точка функции f конечнократно и ее удаленность больше -1 . Подробнее см. в п. 7.3.

З а м е ч а н и е 2. Показатель особости неотрицателен для критических точек фаз одной и двух переменных (см. теоремы 4, 5), для критических точек, удовлетворяющих условиям дополнения г) теоремы 4. Пользуясь дополнением г) теоремы 4, можно доказать, что показатель особости неотрицателен для критических точек фаз трех переменных. По-видимому, показатель особости неотри-

цателен всегда. Это означает, что порядок сложного коротковолнового колебания в каустической точке, по-видимому, всегда больше порядка сложного коротковолнового колебания в некаустической точке (см. пп. 6.1.А, 6.1.Г). В частности, световая каустика, по-видимому, всегда выделяется своей яркостью.

В § 13 определен комплексный показатель особенности критической точки голоморфной функции. Комплексный показатель особенности всегда неотрицателен, см. п. 13.3. Доказательство этого факта использует связь асимптотик интегралов и смешанных структур Ходжа.

6.3. Разрешение особенностей. Доказательство теорем 3—5 использует разрешение особенностей критической точки фазы.

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, аналитическую в окрестности своей критической точки x . Предположим, что значение функции в этой точке равно 0. *Разрешением особенностей критической точки* называются n -мерное аналитическое многообразие Y и его аналитическое отображение $\pi: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, обладающие следующими свойствами.

1. В каждой точке прообраза критической точки x найдется система локальных координат, в которой функция $f \circ \pi$ и якобиан отображения π равны одночленам с точностью до умножения на не обращающиеся в нуль функции.

2. В малой окрестности критической точки x найдется собственное аналитическое подмножество, вне которого в этой окрестности отображение π аналитически обратимо.

3. Прообраз любого компакта из малой окрестности точки x компактен.

З а м е ч а н и е 1. Из первого условия, в частности, следует, что в окрестности прообраза точки x гиперповерхность нулевого уровня функции $f \circ \pi$ локально устроена как объединение координатных гиперплоскостей.

З а м е ч а н и е 2. Иногда требования к отображению π усиливают, заменяя свойство 2 на свойство 2' или даже на свойство 2'' и добавляя свойство 4.

2'. В малой окрестности точки x отображение π обратимо вне гиперповерхности нулевого уровня функции f .

2''. В малой окрестности точки x отображение π обратимо вне критического множества функции f .

4. В малой окрестности прообраза точки x гиперповерхность нулевого уровня функции $f \circ \pi$ является объединением неособых $(n-1)$ -мерных подмногообразий.

Т е о р е м а 6 (Хиронака; см. [106, 125]). *Существует разрешение особенностей (со свойствами 1, 2'', 3, 4) критической точки аналитической функции.*

Эта теорема сформулирована в [125], она является частным случаем общей теоремы Хиронаки о разрешении особенностей (см. [106]).

Замечание 3. Понятие разрешения особенностей имеет естественный комплексный аналог. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, аналитическую в окрестности своей критической точки x . Разрешением называются n -мерное комплексное аналитическое многообразие Y и его аналитическое отображение $\pi: Y \rightarrow \mathbb{C}^n$, которые обладают сформулированными выше свойствами. И в этом случае справедлива теорема Хиронаки.

Теорема Хиронаки сводит исследование осциллирующего интеграла с аналитической фазой к исследованию суммы осциллирующих интегралов, фаза каждого из которых — одночлен. Для этого в интеграле надо сделать замену переменных с помощью отображения π . Осциллирующие интегралы с одночленной фазой называются *элементарными*. Элементарные интегралы изучаются в § 7. Для них несложно указать показатель осцилляции, его кратность, множество показателей. Поэтому при исследовании осциллирующего интеграла с аналитической фазой важно знать разрешение особенностей фазы, уметь следить за тем, как асимптотический ряд для исследуемого интеграла складывается из асимптотических рядов элементарных интегралов, следить за тем, не сокращаются ли при этом старшие члены. Результатом такого анализа является выражение показателя осцилляции и аналогичных характеристик в терминах разрешения особенностей фазы (теорема 7.5). Теоремы 4, 5 — это переформулировки свойств разрешения особенностей, участвующих в этом анализе, в терминах многогранников Ньютона.

6.5. Асимптотики объемов. Асимптотики осциллирующего интеграла тесно связаны с асимптотиками объема множества тех точек, в которых фаза принимает значения, меньшие, чем заданное число, при изменении этого числа и стремлении его к критическому значению фазы.

А. Ф о р м а Г е л ь ф а н д а — Л е р е. При изучении осциллирующих интегралов очень полезен следующий прием, сводящий многомерный осциллирующий интеграл к одномерному. Прием состоит в применении теоремы Фубини. А именно, рассмотрим осциллирующий интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Используя теорему Фубини, сведем интеграл к повторному, в котором сначала интегрируем вдоль гиперповерхностей уровня фазы, а затем по оставшейся переменной — значению фазы. Для этого в интеграле перейдем к новым переменным, одна из которых — фаза.

Сделаем два замечания. Во-первых, фазу можно брать в качестве переменной только вне ее критических точек. Поэтому исключим из рассмотрения объединение гиперповерхностей критических уровней фазы. Объединение этих гиперповерхностей имеет нулевую меру и не влияет на интеграл. Во-вторых, для интегрирования по гиперповерхностям уровня не нужно знать каждую из

остальных новых переменных. Достаточно знать на гиперповерхностях уровня форму $(n-1)$ -мерной плотности, которая после умножения на дифференциал фазы становится формой объема пространства. Такая форма плотности называется *формой Гельфанда — Лере* и обозначается $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n / df$.

Итак, осциллирующий интеграл преобразован к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} \left(\int_{f=t} \varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n / df \right) dt.$$

В этом представлении осциллирующий интеграл является преобразованием Фурье функции, задаваемой внутренним интегралом. Функция одной переменной, определяемая внутренним интегралом, называется *функцией Гельфанда — Лере*.

Функция Гельфанда — Лере — гладкая вне критических значений фазы. В окрестности критического значения фазы функция Гельфанда — Лере разлагается в асимптотический ряд вида

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} (t-t_0)^{\alpha} (\ln(t-t_0))^k.$$

Зная асимптотический ряд функции Гельфанда — Лере, можно определить асимптотический ряд осциллирующего интеграла, и наоборот, асимптотики осциллирующего интеграла дают информацию об асимптотиках функции Гельфанда — Лере. Эти свойства функции Гельфанда — Лере обсуждаются в § 7.

Б. Объем множества меньших значений. Предположим, что фаза имеет изолированный минимум и минимальное значение фазы равно нулю. Предположим также, что амплитуда в окрестности точки минимума тождественно равна 1. Обозначим через J функцию Гельфанда — Лере и рассмотрим новую функцию

$$V(t) = \int_0^t J(s) ds.$$

Очевидно, что при отрицательных значениях аргумента эта функция равна нулю, а при малых положительных значениях аргумента эта функция равна объему множества точек, в которых фаза принимает значения, меньшие заданного. Таким образом, асимптотики функции объема множества меньших значений определяют асимптотики осциллирующего интеграла в случае, когда фаза имеет изолированный минимум, а амплитуда равна константе в окрестности точки минимума фазы.

Укажем порядки скорости стремления к нулю объема множества меньших значений для простейших изолированных точек минимума. Классификация критических точек минимума, не устранимых малым шевелением из семейства функций, зависящих от не более чем 16-ти параметров, приведена В. А. Васильевым в [29], там же вычислены асимптоти и объемов меньших значений. Согласно этой классификации единственными точками минимума, не устранимыми малым шевелением из семейств функций, зависящих от не более чем 5-ти параметров, являются точки минимума,

в которых функция диффеоморфизмом пространства приводится к виду $A_s: x_1^{s+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2$, где $s = 1, 3, 5$. При малых положительных t главный член асимптотики объема множества меньших значений имеет вид $\text{const} \cdot t^{-\beta+n/2}$, где β соответственно равно 0, 1/4, 1/3.

Сформулируем общую теорему о вычислении порядка скорости стремления к нулю объема множества меньших значений.

Теорема 7 (ср. [29]). *Предположим, что аналитическая функция имеет изолированный минимум и минимальное значение равно нулю. Тогда при $t \rightarrow +0$ функция V объема множества меньших*

значений разлагается в асимптотический ряд $\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k$.

Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, составленных из положительных рациональных чисел. Если дополнительно известно, что ряд Тейлора функции в точке минимума имеет $\mathbb{R}$ -невырожденную главную часть, то показатель α максимального члена асимптотического ряда равен взятой с минусом удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора.

Теорема доказана в п. 8.3.В.

З а м е ч а н и я. 1. При изменении формы объема пространства (т. е. при умножении ее на положительную функцию) порядок старшего члена предыдущего асимптотического ряда не меняется.

2. Предыдущий асимптотический ряд сходится при малых положительных t .

В. Площадь поверхности уровня. В п. 8.3.В сформулирована теорема о вычислении асимптотики площади компактной поверхности уровня при стремлении уровня к критическому.

Г. Множество точек с малым градиентом. Еще одной характеристикой критической точки, подобной рассмотренным выше, является скорость стремления к нулю объема множества тех точек, в которых длина градиента меньше, чем заданное число, при стремлении этого заданного числа к нулю.

Предположим, что в пространстве задана риманова метрика. Эта метрика (с помощью матрицы, обратной к матрице метрики) определяет метрику на кокасательном расслоении к пространству. В этой метрике вычислим квадрат длины градиента $\partial f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ рассматриваемой функции f . В окрестности выделенной критической точки функции для каждого малого положительного t рассмотрим объем $V(t)$ множества тех точек окрестности, в которых квадрат длины градиента меньше t . Будем интересоваться асимптотикой объема при $t \rightarrow +0$. Поскольку все метрики в окрестности точки взаимно ограничены, порядок главного члена асимптотики не зависит от выбора метрики.

Пример. Для критических точек типов A_{μ}, D_4, D_{μ} ($\mu > 4$), E_6, E_7, E_8 главный член асимптотики функции V при $t \rightarrow +0$ имеет

вид $\text{const } t^{-\alpha+n/2} (\ln t)^k$, где (k, α) соответственно равны $((\mu-1)/2\mu, 0)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$, $(7/12, 0)$, $(5/8, 0)$, $(5/8, 0)$.

Для вычисления асимптотики объема множества точек с малым градиентом можно пользоваться теоремой 7, примененной к функции (df, df) , а также теоремами 4, 5.

6.6. Равномерные оценки. Наряду с асимптотиками индивидуальных осциллирующих интегралов часто бывает полезно знать равномерные оценки осциллирующих интегралов, зависящих от дополнительных параметров.

Определим понятия равномерной оценки и равномерного показателя осцилляции.

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Назовем ее деформацией всякую гладкую функцию $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$, равную функции f при нулевом значении второго аргумента.

О п р е д е л е н и е. В критической точке x^0 фазы f имеет место *равномерная оценка с показателем α* , если для любой деформации F фазы f найдется окрестность в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ точки $x^0 \times 0$ такая, что для любой гладкой функции φ с носителем в этой окрестности и для любого положительного ε существует число $C(\varepsilon, \varphi)$, для которого при всех положительных τ

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau F(x, y)} \varphi(x, y) dx_1 \dots dx_n \right| < C(\varepsilon, \varphi) \tau^{\alpha + \varepsilon}.$$

Нижняя грань таких чисел α называется *равномерным показателем осцилляции* фазы в критической точке.

Очевидно, что равномерный показатель осцилляции не меньше индивидуального.

Возникает естественное предположение, сформулированное В. И. Арнольдом в [4, 5, 122], что равномерный показатель осцилляции равен индивидуальному показателю, т. е. что осциллирующий интеграл допускает равномерную по дополнительным параметрам оценку сверху величиной, пропорциональной значению интеграла при исходном значении дополнительных параметров.

Для справедливости этого предположения необходимо, чтобы индивидуальный показатель осцилляции был полунепрерывен сверху при непрерывных изменениях критической точки. А именно, необходимо, чтобы показатель осцилляции сложной критической точки был не меньше показателя осцилляции более простой критической точки, полученной при распадении сложной. Анализ таблиц показателей особенностей и известных примыканий друг к другу критических точек, классифицированных в главе 2 ОДО-1, показывает, что такая полунепрерывность имеет место для критических точек, классифицированных в главе 2 ОДО-1.

Т е о р е м а 8. *Равномерный показатель осцилляции равен индивидуальному для критических точек функций одной переменной (И. М. Виноградов [31]), для простых критических точек (Дж. Дю-*

истермаат [148]), для параболических (И. Колен де Вердые [139]), для гиперболических критических точек серии $T_{p,q,r}$ (В. Н. Карпушкин [63]), для критических точек функций двух переменных (В. Н. Карпушкин [61]).

С л е д с т в и е. Для критических точек, встречающихся неустранимо в семействах фаз общего положения, зависящих от не более чем семи параметров, равномерный показатель осцилляции равен индивидуальному.

Согласно теореме 8 при движении по каустике, отвечающей одной из критических точек, перечисленных в теореме, интенсивность коротковолнового колебания в предельной точке не меньше, чем интенсивность колебания в близкой допредельной точке. Удивительно, но это явление не имеет места для всех каустик. А именно, имеются примеры вырожденных критических точек фаз, для которых равномерный показатель осцилляции больше индивидуального (см. [18]).

Эти примеры изложены в § 9. Критические точки из построенных примеров очень вырождены, коразмерность таких критических точек порядка 80 и более (т. е. эти критические точки устраняемы малым шевелением из семейств функций с меньшим числом параметров).

Согласно построенным примерам существуют критическая точка и ее деформация, обладающие следующим свойством. Показатель осцилляции критической точки при выделенном значении параметра деформации меньше, чем показатель осцилляции критической точки при общем значении параметра деформации, т. е. модуль осциллирующего интеграла при выделенном значении параметра деформации существенно меньше, чем модуль интеграла при общем значении параметра.

Было бы интересно выяснить, можно ли указанное явление наблюдать физически в виде подмножества каустики, более темного по сравнению со своим окружением? Как уже отмечалось, такое явление не наблюдается на каустиках общего положения в маломерных пространствах (теорема 8 и ее следствие).

З а м е ч а н и е. Доказательство В. Н. Карпушкина равенства равномерного и индивидуального показателей осцилляции для критических точек функций двух переменных основано на теореме 5. Как уже отмечалось, равенство равномерного и индивидуального показателей осцилляции возможно только при условии полунепрерывности сверху индивидуального показателя осцилляции при деформациях критической точки. Согласно теореме 5 для функций двух переменных это свойство полунепрерывности можно переформулировать так: пусть задано произвольное семейство функций двух переменных, зависящих от параметра и имеющих критическую точку в начале координат, тогда удаленность этой критической точки полунепрерывно сверху зависит от параметра. Вероятно, это утверждение справедливо для функций любого числа

переменных. Интересная задача в этой области — выразить равномерный показатель осцилляции через другие характеристики критической точки (многогранники Ньютона, разрешение особенностей и т. п.). Быть может, равномерный показатель осцилляции выражается через удаленности критических точек, стабильно эквивалентных данной. Другим вероятным кандидатом для выражения равномерного показателя осцилляции является комплексный показатель осцилляции, определенный в § 13. Комплексный показатель осцилляции определяется для критической точки голоморфной функции, он является комплексным аналогом показателя осцилляции. Б. Мальгранж в [185] сформулировал гипотезу о полунепрерывности комплексного показателя осцилляции при деформациях критической точки. Комплексный показатель осцилляции является одним из спектральных чисел критической точки голоморфной функции (спектр определен в § 13). В п. 14.3 сформулирована гипотеза В. И. Арнольда о полунепрерывности спектра при деформациях критической точки.

В этой главе изучаются асимптотики индивидуальных осциллирующих интегралов. В этом пункте мы обсудили их равномерные оценки. Есть еще один подход к оценкам интегралов — это оценки в среднем. Сформулируем соответствующий результат.

Рассмотрим осциллирующий интеграл, зависящий от дополнительных параметров,

$$I(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau F(x, y)} \varphi(x, y) dx_1 \dots dx_n.$$

Обозначим через Σ множество критических точек фазы, т. е.

$$\Sigma = \{(x, y) \mid \partial F / \partial x_j(x, y) = 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Т е о р е м а 9 (см. [148]). *Предположим, что Σ — подмногообразие, т. е. дифференциалы $d(\partial F / \partial x_j)$, $j = 1, \dots, n$, линейно независимы в каждой точке множества Σ . Предположим, что носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности одной из точек множества Σ . Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\int |I(\tau, y)|^2 dy \approx \sum_{l=n}^{\infty} a_l(\varphi) \tau^{-l},$$

где числовые коэффициенты a_l являются обобщенными функциями амплитуды с носителями на Σ . В частности, старший коэффициент a_n пропорционален интегралу квадрата модуля амплитуды по критическому множеству Σ .

Это утверждение соответствует утверждению об унитарности канонического оператора Маслова (см. [75—77, 44]) и означает, что хотя при индивидуальных значениях дополнительных параметров асимптотическое поведение интеграла имеет сложный характер,

интеграл от квадрата модуля осциллирующего интеграла ведет себя так же, как если бы фаза имела только невырожденные критические точки по переменным интегрирования.

Доказательство теоремы 9 основано на том, что интеграл от квадрата модуля есть осциллирующий интеграл. Его фаза $F(x, y) - F(z, y)$ имеет критические точки на множестве $\{(x, y, z) | x=z, (x, y) \in \Sigma\}$ (если x, z достаточно близки), критические точки невырождены в трансверсальном направлении к этому множеству.

6.7. Число целых точек в семействе гомотетичных областей. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим ограниченную область D с гладкой границей. Мы будем оценивать разность между объемом области, растянутой в λ раз, и числом $N(\lambda)$ точек с целыми координатами, находящихся в растянутой области, т. е. разность

$$R(\lambda) = \lambda^n V(D) - N(\lambda).$$

Изучение этого вопроса мотивируется следующими причинами (см. [139]):

1) Случай, в котором D есть эллипсоид, рассматривался в теории чисел в связи с исследованием арифметических свойств квадратичных форм (см. [60, 32]).

2) Если область D определена условием $\{f \leq 1\}$, где $f: \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ — гладкая однородная функция (скажем, однородный многочлен), то функция $N(\lambda)$ интерпретируется как спектральная функция псевдодифференциального оператора P на торе $\mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$, заданного своим спектральным разложением

$$P(\exp(i\langle k, x \rangle)) = f(k) \exp(i\langle k, x \rangle).$$

3) Аналогичным образом исследуется проблема, возникающая при численном интегрировании: пусть f — гладкая функция и $N_f(\lambda) = \sum_{x \in \lambda D \cap \mathbb{Z}^n} f(x/\lambda)$. Требуется оценить разность $R_f(\lambda) = \lambda^n \int_D f dx - N_f(\lambda)$.

Разность $R(\lambda)$ оценивают степенью параметра λ : $R(\lambda) = O(\lambda^\beta)$.

Тривиальная оценка для любой области получается, если взять $\beta = n - 1$. Действительно, разность $R(\lambda)$ меньше, чем объем окрестности ширины $2\sqrt{n}$ границы растянутой области.

Для шара радиуса 1 с центром в начале координат $\beta \geq n - 2$. Точнее, найдется сколь угодно большое λ , для которого на сфере $\lambda \partial D$ лежит $\sim \lambda^{n-2}$ точек с целыми координатами. Действительно, рассмотрим целые точки, лежащие между сферами $(\lambda + 1) \partial D$ и $\lambda \partial D$. Их число пропорционально объему, т. е. пропорционально $(\lambda + 1)^n - \lambda^n \sim \lambda^{n-1}$. Между этими сферами проходит приблизительно λ сфер с центром в начале координат, у которых квадрат радиуса — целое число. Поэтому λ^{n-1} целых точек лежит на λ сферах, и значит, найдется сфера, на которой лежит не меньше чем $\sim \lambda^{n-2}$ точек.

Наилучшее (наименьшее) число β зависит от вида области. Наиболее исследован случай области на плоскости.

Т е о р е м а 10 (см. [204, 206, 139]). Предположим, что $n=2$. Обозначим через l максимальный порядок обращения в нуль кривизны границы области. Тогда, если $l=0$ или 1 (это ситуация общего положения), то в качестве β можно взять $2/3$. Если $l \geq 1$, то в качестве β можно взять $1 - 1/(l+2)$. Более того, если $l \geq 2$, то, вообще говоря, β нельзя взять меньшим (например, для $D = \{x^{2k} + y^{2k} \leq 1\}$).

В многомерной ситуации исследован только случай строго выпуклой области и при $n \leq 7$ случай области с границей, находящейся в общем положении.

Т е о р е м а 11 (см. [204, 205]). Если область $D \subset \mathbb{R}^n$ выпукла и невырождена вторая квадратичная форма ее границы, то в качестве β можно взять $n - 2 + 2/(n+1)$.

Т е о р е м а 12 (см. [139]). Предположим, что $n \leq 7$. Пусть X — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности $n-1$. Тогда существует открытое, всюду плотное подмножество в пространстве всех вложений многообразия X в $\mathbb{R}^n$, обладающее свойством: если вложение принадлежит подмножеству и образ вложения ограничивает область в $\mathbb{R}^n$, то для этой области в качестве числа β можно взять $n - 2 + 2/(n+1)$.

Как показывает пример шара с центром в начале координат, оценку с $\beta = n - 2 + 2/(n+1)$, вообще говоря, нельзя существенно улучшить.

А. Ф о р м у л а с у м м и р о в а н и я П у а с с о н а. Объясним, каким образом оценка числа целых точек связана с осциллирующими интегралами.

Число точек целочисленной решетки в растянутой области λD равно числу точек уплотненной решетки $\frac{1}{\lambda} \mathbb{Z}^n$ в исходной области. Будем для простоты предполагать, что λ — натуральное число и что область D лежит в стандартном n -мерном кубе с ребрами длины 1. В этом случае мы можем рассматривать область как область тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ и подсчитывать на торе точки проекции решетки $\frac{1}{\lambda} \mathbb{Z}^n$, попавшие в D . Обозначим через χ характеристическую функцию области D , т. е. функцию, равную 1 на D и равную 0 на D . Тогда

$$R(\lambda) = \lambda^n \int_{\mathbb{T}^n} \chi dx - \sum_{0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \lambda-1} \chi(x/\lambda).$$

Разложим характеристическую функцию в ряд Фурье:

$$\chi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\chi}(k) \exp(2\pi i \langle k, x \rangle),$$

и рассмотрим аналогичную разность для каждого члена ряда:

$$\lambda^n \int \exp(2\pi i \langle k, x \rangle) dx - \sum_x \exp(2\pi i \langle k, x \rangle / \lambda).$$

Для $k=0$ эта разность равна нулю. Если $k \neq 0$, то равен нулю первый член этой разности, и остается вычислить второй член. Вторым член является произведением сумм n геометрических прогрессий. Суммируя их, получаем, что второй член разности равен нулю, если хотя бы одна из координат вектора k не делится на λ . Если же все координаты вектора k делятся на λ , то сумма равна $-\lambda^n$. Это соображение показывает, что

$$R(\lambda) = -\lambda^n \sum_{k \in \lambda \mathbb{Z}^n \setminus 0} \hat{\chi}(k) = -\lambda^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \hat{\chi}(\lambda k). \quad (3)$$

Эта формула называется *формулой суммирования Пуассона*. К сожалению, для характеристической функции она не верна: при выводе формулы мы переставили порядки суммирования по k и суммирования по точкам уплотненной решетки. Для справедливости формулы Пуассона достаточно, чтобы ряд Фурье мажорировался абсолютно сходящимся рядом с постоянными коэффициентами. В частности, формула Пуассона справедлива для всякой гладкой финитной функции χ на $\mathbb{R}^n$.

Для исследования разности $R(\lambda)$ сначала сглаживают характеристическую функцию, затем применяют формулу Пуассона и исследуют ее правую часть (см., например, [139]). Для сглаживания характеристическую функцию свертывают с эталонной функцией. Преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований Фурье характеристической функции и эталонной. Поэтому при изучении правой части формулы Пуассона, примененной к сглаженной характеристической функции, важно знать, как ведут себя коэффициенты Фурье $\hat{\chi}(\lambda k)$ характеристической функции при $\lambda \rightarrow \infty$. Коэффициенты Фурье — это осциллирующие интегралы.

Б. Преобразование Фурье характеристической функции. Коэффициент Фурье

$$\hat{\chi}(k) = \int_D \exp(-2\pi i \langle k, x \rangle) dx$$

является осциллирующим интегралом, в котором роль большого параметра играет длина вектора k , а роль фазы играет функция $-\langle \alpha(k), x \rangle$, где $\alpha(k) = k/\|k\|$ — соответствующий вектор единичной длины. Этот интеграл по формуле Стокса преобразуется в осциллирующий интеграл по границе области. Фазой нового интеграла по-прежнему служит функция $-\langle \alpha(k), x \rangle$. Следовательно, величина коэффициента Фурье $\hat{\chi}(k)$ при больших длинах вектора k определяется критическими точками ограничения на границу линейной функции $\langle \alpha(k), x \rangle$. Например, если область выпукла и

вторая квадратичная форма границы невырождена, то все критические точки ограничения невырождены и $\hat{\chi}(k) \sim \|k\|^{-(n+1)/2}$ (теорема 2).

Разберем подробнее случай области на плоскости. Критические точки ограничения функции $\langle \alpha(k), x \rangle$ на кривую ∂D — это те точки, в которых вектор нормали к кривой равен $\pm \alpha(k)$. Если в такой точке кривизна кривой отлична от нуля, то критическая точка невырождена и ее вклад в коэффициент Фурье имеет порядок $\|k\|^{-3/2}$. Если в точке границы с нормалью $\pm \alpha(k)$ кратность нуля кривизны равна l , то критическая точка имеет тип A_{l+1} и в этом случае ее вклад в коэффициент Фурье имеет порядок $\|k\|^{-1-1/(l+2)}$. Нормаль в точке границы, в которой обращается в нуль кривизна, может иметь иррациональный тангенс наклона. Такая точка границы не будет критической ни для одной функции $\langle \alpha(k), x \rangle$. Вклад такой точки в сумму (3) определяется тем, с какой скоростью тангенс наклона ее нормали приближается рациональными числами. Если тангенс наклона хорошо приближается рациональными числами со сравнительно небольшими числителем и знаменателем, то критические точки ограничения линейной функции $\langle \alpha(k), x \rangle$ с вектором k сравнительно небольшой длины будут почти вырожденными и будут давать большой вклад в сумму (3). В общем положении кривая на плоскости имеет в качестве вырождений только точки перегиба, т. е. у кривой общего положения кратности нулей функции кривизны не больше 1. Поэтому для кривой общего положения критические точки ограничения на границу линейной функции либо невырождены, либо имеют тип A_1 . Следовательно, в общем положении можно ожидать, что $R(\lambda) \sim \lambda^{2/3}$. Эти рассуждения объясняют теорему 10.

В. Оценка, усредненная по поворотам. Основной вклад в коэффициенты Фурье характеристической функции области дают окрестности тех точек границы, в которых нормаль имеет рациональное направление и кривизна обращается в нуль. Ранделу принадлежит идея о том, что после поворота области таких точек, вообще говоря, не будет и средняя по поворотам оценка может быть лучше индивидуальной оценки.

Теорема 13 (см. [206, 207, 24, 25]). Обозначим через ds меру Хаара на специальной ортогональной группе SO_n . Обозначим через $R(\lambda, s)$ разность, соответствующую области, растянутой в λ раз и затем повернутой преобразованием $s \in SO_n$. Тогда

$$\int_{SO_n} |R(\lambda, s)| ds = O(\lambda^{n-2+2/(n+1)}).$$

Теорема 14 (см. [206, 207, 24, 25]). Обозначим через G группу всех движений вида st , где $s \in SO_n$, t — параллельный перенос пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $I \subset G$ — подгруппа всех параллельных переносов на векторы с целыми координатами. Обозначим через H фак-

торпространство G/I . H топологически $SO_n \times T^n$, где $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ — n -мерный тор. Обозначим через dh меру Хаара на H . Тогда

$$\left(\int_H |R(\lambda, h)|^2 dh \right)^{1/2} = O(\lambda^{(n-1)/2}).$$

Аналог теоремы 13 для многогранников в $\mathbb{R}^n$ доказан Тарнопольска-Вейсс.

Теорема 15 (см. [223]). Пусть D — многогранник в $\mathbb{R}^n$, содержащий начало координат и обладающий свойством: продолжения его граней не проходят через начало координат. Тогда

$$\int_{SO_n} |R(\lambda, s)| ds = O((\ln \lambda)^{2+\delta}).$$

Доказательства теорем 13, 14 основаны на оценке квадрата модуля коэффициента Фурье характеристической функции области.

Теорема 16 (см. [24, 25]). При $\|k\| \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\int_{SO_n} |\hat{\chi}(k, s)|^2 ds = O(\|k\|^{-(n+1)}). \quad (4)$$

Если граница области зависит бесконечно дифференцируемым образом от дополнительных параметров, то эта оценка равномерна по дополнительным параметрам при условии, что параметры мало отличаются от исходных значений.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9.

Выведем теорему 14 из теоремы 16. Каждый элемент $h \in H$ однозначно представляется в виде st , где $s \in SO_n$, $t \in T^n$. Зафиксируем s . Тогда $R(\lambda, h)$ — функция на T^n . Разложим ее в ряд Фурье:

$$R(\lambda, st) = \sum_k a(\lambda, s, k) e^{2\pi i \langle k, t \rangle}.$$

Простое прямое вычисление показывает, что $a(\lambda, s, 0) = 0$, $a(\lambda, s, k) = (-1)^{n+1} \hat{\chi}(-\lambda k, s) \lambda^n$. Используя равенство Парсеваля, получаем

$$\int_{SO_n} \left(\int_{T^n} |R(\lambda, st)|^2 dt \right) ds = \int_{SO_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \lambda^{2n} |\hat{\chi}(-\lambda k, s)|^2 ds.$$

Теперь теорема 14 следует из (4).

Замечание. Для области, граница которой имеет невырожденную вторую квадратичную форму, справедлива оценка $\hat{\chi}(k) \sim \|k\|^{-(n+1)/2}$ (см. пункт Б). Поэтому для такой области

$$\left(\int_{T^n} |R(\lambda, t)|^2 dt \right)^{1/2} = O(\lambda^{(n-1)/2}).$$

Д. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 12 основано на двух интересных утверждениях о равномерных оценках осциллирующих интегралов, зависящих от дополнительных параметров. В этих утверждениях предполагается, что все критические точки фазы простые или параболические.

Т е о р е м а 17 (см. [139]). Рассмотрим осциллирующий интеграл

$$I(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau F(x, y)} \varphi(x, y) dx.$$

Предположим, что при каждом значении дополнительных параметров все критические точки фазы этого интеграла являются простыми или параболическими. Тогда имеет место неравенство

$$|I(\tau, y)| \leq \text{const} \cdot \tau^{-n/2} \sum_{(x, y) \in \Sigma \cap \text{supp } \varphi} |\det F''_{xx}(x, y)|^{-1/2},$$

где через Σ обозначено множество всех критических точек фазы по переменным интегрирования, через F''_{xx} обозначена матрица вторых производных фазы по переменным интегрирования.

Чтобы сформулировать следующую теорему, сделаем несколько замечаний. Пусть $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \rightarrow \mathbb{R}$ — минимальная версальная деформация простой или параболической критической точки (μ — кратность критической точки). Обозначим через W_r подмножество базы деформации, состоящее из всех точек y , для которых функция $F(\cdot, y)$ имеет критическую точку кратности r . Множество W_r имеет размерность $r-1$, за исключением того случая, когда исходная критическая точка является параболической. В этом случае размерность множества W_μ равна 2. Будем обозначать через $\beta(\sigma)$ показатель осцилляции критической точки типа σ .

Т е о р е м а 18 (см. [139]). Предположим, что фаза осциллирующего интеграла $I(\tau, y)$ является минимальной версальной деформацией простой или параболической критической точки. Тогда, если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности исходной критической точки, то осциллирующий интеграл допускает оценку:

$$|I(\tau, y)| \leq \varphi_p(y) \tau^{\beta_p},$$

где $\beta_p = \max \{ \beta(\sigma) | \sigma \text{ — критическая точка кратности } p, \text{ примыкающая к исходной критической точке} \}$ и

$$\varphi_p(y) \leq \text{const} \cdot d(y, W_{p+1})^{-\alpha_{p+1}^p} \dots d(y, W_\mu)^{-\alpha_\mu^p}.$$

В этой формуле d — расстояние в произвольной римановой метрике на базе версальной деформации, числа $\alpha_{p+1}^p, \dots, \alpha_\mu^p$ — положительные рациональные числа, определяемые по исходной критической точке (см. в [139] их определение).

З а м е ч а н и я. 1. В этой теореме $p=1, \dots, \mu$. Для $p=\mu$ теорема утверждает оценку осциллирующего интеграла с равномер-

ным показателем, равным индивидуальному показателю исходной критической точки.

2. Все простые и параболические критические точки квазиоднородны. База версальной деформации квазиоднородной критической точки имеет естественную квазиоднородную структуру. Простые и параболические критические точки выделяются в классе квазиоднородных критических точек условием неотрицательности весов квазиоднородности базы версальной деформации. Неотрицательность весов — основа доказательства теорем 17, 18. Теоремы доказываются индукцией по кратности исходной критической точки. В базе версальной деформации рассматривается квазисфера. По индуктивным предположениям при ограничении параметров деформации на квазисферу требуемая оценка уже доказана. Эта оценка распространяется на всю базу с помощью квазиоднородной структуры. Числа α_j^p , участвующие в теореме, конструируются из весов квазиоднородности базы и показателей осцилляции примыкающих критических точек.

6.8. Наибольший показатель особости. Рассмотрим критические точки, которые неустранимы малым шевелением из семейств функций n переменных, зависящих от l параметров. Максимум их показателей особости в зависимости от l , n имеет вид $\beta_l(n) = 1/2 - 1/N$, где число N при $n \geq 3$ дается таблицей

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10, $n=3$	11, $n=3$	10, $n>3$
N	+2	+3	+4	+6	+8	+12	∞	∞	-24	-16	-12	-8	-6

Все числа $\beta_l = \beta_l(n)$ рациональны (см. п. 7.4). При достаточно больших n число β_l не зависит от n (следствие теоремы Кушниренко в п. 12.7 ОДО-1 и теоремы о выделении квадратов в п. 11.1 ОДО-1).

Вычисление всех рациональных чисел кажется трудной задачей. По-видимому, $\beta_l \sim \sqrt{2l}/6$. Гипотетически невырожденная кубическая форма от n переменных является в своей коразмерности критической точкой с максимальным показателем особости (т. е. при $l = n(n+1)/2$). Иными словами, $\beta_{n(n+1)/2} = n/6$ (см. [4]). Из теоремы 5 следует, что $\beta_l(2) \sim 1 - \sqrt{2/l}$. Из теоремы 5 также следует, что при $n=2$ максимум показателей особости при заданной кратности μ имеет асимптотику $1 - 2/\sqrt{\mu}$.

6.9. Расположение материала главы. В § 7 мы определяем форму Гельфанда — Лере и обсуждаем ее свойства. Мы рассматриваем критическую точку одночлена и выражаем ее показатель осцилляции и множество показателей через показатели одночлена. Мы вводим дискретные характеристики разрешения особенностей критиче-

ской точки аналитической фазы и выражаем через них показатель осцилляции и множество показателей критической точки.

В § 8 мы доказываем теорему 4. Для этого по многограннику Ньютона мы строим аналитическое многообразие и его отображение на $\mathbb{R}^n$. Построенные многообразие и его отображение разрешают особенности всякой критической точки с данным многогранником Ньютона при условии, что главная часть ее ряда Тейлора $\mathbb{R}$ -невырождена. В § 9 доказывается аддитивность показателя осцилляции и его кратности, объясняются вычисления показателей табличных функций, приводятся примеры, демонстрирующие отсутствие полунепрерывности показателя осцилляции при деформациях критической точки.

§ 7. Элементарные интегралы и разрешение особенностей фазы

В этом параграфе изучаются асимптотики осциллирующего интеграла, фаза которого — одночлен. Указывается связь асимптотик осциллирующего интеграла с полюсами мероморфной функции $F(\lambda) = \int f^\lambda(x) \varphi(x) dx$, где f — фаза, φ — амплитуда осциллирующего интеграла. Вводятся дискретные характеристики разрешения особенностей критической точки фазы: вес разрешения, набор кратностей. Описывается связь этих характеристик и основных характеристик асимптотического поведения осциллирующего интеграла: показателя осцилляции, его кратности и множества показателей.

7.1. Форма Гельфанда — Лере. При исследовании интегралов вида $\int e^{i\tau f(x)} \varphi(x) dx$, $\int f^\lambda(x) \varphi(x) dx$, где τ, λ — параметры, удобно за одну из переменных взять функцию f . В этом случае интегралы превращаются в обычные преобразования Фурье и Меллина интеграла по оставшимся переменным. Подынтегральное выражение в этом последнем интеграле называется формой Гельфанда — Лере.

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, ω — гладкая дифференциальная n -форма на $\mathbb{R}^n$. Будем искать такую гладкую дифференциальную $(n-1)$ -форму ψ , для которой

$$df \wedge \psi = \omega. \quad (1)$$

Л е м м а 1. Если в точке отличен от нуля дифференциал функции f , то в окрестности точки существует форма ψ со свойством (1). Ограничение этой формы на произвольное многообразие уровня функции определено однозначно.

Форма со свойством (1) называется формой Гельфанда — Лере формы ω и обозначается через ω/df .

Для доказательства леммы достаточно перейти к координатам, в которых функция — одна из координат.

Пример. Пусть $f(x, y) = y^2 - x^3 - sx$ (где s — число) — функция, $\omega = dx \wedge dy$ — форма площади. Тогда на кривой уровня t форма Гельфанда — Лере равна

$$-dx/2y = -dx/2\sqrt{x^3 + sx + t}.$$

Интеграл такой формы называется *эллиптическим*.

Докажем два замечательных свойства формы Гельфанда — Лере.

Ориентируем многообразия уровня функции стандартным образом.

Лемма 2.1. Пусть ω — гладкая дифференциальная n -форма с компактным носителем. Предположим, что носитель формы не пересекается с критическим множеством функции f . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{f=t} \omega/df \right) dt. \quad (2)$$

2. Пусть ψ — гладкая дифференциальная $(n-1)$ -форма с компактным носителем. Предположим, что носитель формы не пересекается с критическим множеством функции f . Тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{f=t} \psi \right) = \int_{f=t} d\psi/df. \quad (3)$$

Доказательство. Свойство (2) — очевидное следствие теоремы Фубини. Свойство (3) — следствие теоремы Стокса (см. [14, 69]).

Следствие. Пусть f — аналитическая функция, не равная константе, ω — гладкая дифференциальная n -форма с компактным носителем; тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau} \left(\int_{f=t} \omega/df \right) dt. \quad (4)$$

Действительно, мера объединения особых многообразий уровня равна нулю.

7.2. Асимптотики интегралов формы Гельфанда — Лере.

Определение. Элементарным осциллирующим интегралом называется интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\tau x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}} |x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}| \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (5)$$

где $k_1, \dots, k_n, m_1, \dots, m_n$ — неотрицательные целые числа, φ — гладкая функция с компактным носителем, τ — вещественный параметр.

Далее функцию $\pm x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ будем обозначать через f , а форму $|x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}| \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ — через ω . Будем предполагать, что $k_1 + \dots + k_n \geq 2$.

Положим для не равных нулю t $J(t) = \int_{f=t} \omega/df$. J — гладкая функция на $\mathbb{R} \setminus 0$, равная нулю вне достаточно большого интервала. Функцию J назовем *функцией Гельфанда—Лере* формы ω .

Асимптотическое поведение при $\tau \rightarrow +\infty$ элементарного интеграла будем изучать следующим образом. Сначала выясним асимптотику функции Гельфанда — Лере, а затем, пользуясь формулой (4) и стандартными формулами для асимптотик однократных осциллирующих интегралов [96], получим асимптотическое разложение элементарного интеграла.

Мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1 (см. [164]). *Функция Гельфанда — Лере разлагается в асимптотический ряд*

$$J(t) \approx \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}^+ t^{\alpha} (\ln t)^k \quad \text{при } t \rightarrow +0, \quad (6)$$

$$J(t) \approx \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}^- t^{\alpha} (\ln t)^k \quad \text{при } t \rightarrow -0, \quad (7)$$

где α пробегает некоторое ограниченное снизу дискретное подмножество вещественных чисел. Эти асимптотические разложения можно почленно дифференцировать.

Теорему 1 нетрудно доказать индукцией по n .

Чтобы описать асимптотическое разложение функции Гельфанда—Лере, мы рассмотрим интегралы $F_{\pm} = \int_{\pm f > 0} (\pm f)^{\lambda} \omega$, где λ —

комплексный параметр. Мы докажем, что интегралы являются мероморфными функциями параметра. Мы выразим коэффициенты рядов (6) (7) и показатели α в этих рядах через полюсы и коэффициенты Лорана полученных мероморфных функций. Затем явно укажем эти полюсы и коэффициенты Лорана.

А. Асимптотики функции Гельфанда—Лере и полюса ее преобразования Меллина. Пусть $J: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, равная нулю для достаточно больших значений аргумента. Предположим, что имеет место асимптотическое разложение

$$J(t) \approx \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^l a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k \quad \text{при } t \rightarrow +0, \quad (8)$$

где α пробегает некоторое ограниченное снизу дискретное подмножество вещественных чисел. Рассмотрим интеграл $F(\lambda) =$

$= \int_0^{\infty} t^{\lambda} J(t) dt$, где λ — комплексный параметр. Интеграл корректно

определен при достаточно больших значениях вещественной части параметра и при этих условиях голоморфно зависит от параметра.

Теорема 2 (см. [41]). *Функция F аналитически продолжается на всю комплексную прямую как мероморфная функция. Аналитическое продолжение имеет полюсы в точках $\lambda = -(\alpha + 1)$, где α пробегает то же дискретное множество, что и в (8). Коэффициент при $(\alpha + 1 + \lambda)^{-(k+1)}$ в разложении Лорана в точке $\lambda = -(\alpha + 1)$ равен $(-1)^k k! a_{k, \alpha}$.*

Доказательство с очевидностью следует из формулы

$$\int_0^1 t^{\alpha+\lambda} (\ln t)^k dt = (-1)^k k! / (\alpha + \lambda + 1)^{k+1}.$$

Б. Полюсы и коэффициенты Лорана преобразования Меллина функции Гельфанда—Лере. Пусть $f = \pm x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ — одночлен. Рассмотрим два интеграла

$$F_{\pm}(\lambda) = \int_{\pm f > 0} (\pm f)^{\lambda} |x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}| \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где λ — комплексный параметр. По формуле (2) на стр. 159

$$F_+(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} J(t) dt, \quad F_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 (-t)^{\lambda} J(t) dt,$$

где J — функция Гельфанда—Лере. Согласно теоремам 1, 2 интегралы $F_{\pm}$ — мероморфные функции параметра. Явно укажем полюсы и коэффициенты Лорана этих функций.

Лемма 3.1. *Функции $F_{\pm}$ голоморфны вне точек комплексной прямой, принадлежащих следующим n арифметическим прогрессиям:*

$$\begin{aligned} & -(m_1 + 1)/k_1, -(m_1 + 2)/k_1, \dots; -(m_2 + 1)/k_2, \\ & -(m_2 + 2)/k_2, \dots; \dots -(m_n + 1)/k_n, -(m_n + 2)/k_n, \dots \end{aligned}$$

В точке, принадлежащей ровно r из этих прогрессий, функции $F_{\pm}$ имеют полюс не выше r -го порядка.

2. Все коэффициенты разложений Лорана функций $F_{\pm}$ в произвольной точке комплексной прямой суть обобщенные функции амплитуды φ .

Доказательство. Достаточно доказать заключения для интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^a \dots \int_0^a x_1^{k_1 \lambda + m_1} \dots x_n^{k_n \lambda + m_n} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n,$$

где a — положительное число. Удобно рассмотреть более общий интеграл

$$\tilde{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int_0^a \dots \int_0^a x_1^{k_1 \lambda_1 + m_1} \dots x_n^{k_n \lambda_n + m_n} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Пусть N — большое натуральное число. Сделаем преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \int_0^a \dots \int_0^a x^{k\lambda+m} R\varphi dx + \sum_{l_1=0}^N \frac{a^{k_1\lambda_1+m_1+l_1+1}}{k_1\lambda_1+m_1+l_1+1} \times \\ & \times \frac{1}{l_1!} \int_0^a \dots \int_0^a x_2^{k_2\lambda_2+m_2} \dots x_n^{k_n\lambda_n+m_n} \frac{\partial^{l_1}\varphi}{\partial x_1^{l_1}}(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \quad (9) \end{aligned}$$

где $R\varphi$ — разность функции φ и ее многочлена Тейлора степени N по x_1 .

Первый из этих интегралов не имеет особенностей по λ_1 при $k_1\lambda_1+m_1+N+1 > 0$, а полюсы по λ_1 других членов в правой части принадлежат первой из указанных в лемме прогрессий. Повторяя последовательно с каждым интегралом в правой части ту же процедуру по другим переменным, а затем полагая $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\lambda$, получим первую часть леммы. Это рассуждение позволяет явно аналитически продолжить интеграл в окрестность наперед заданной точки комплексной прямой (см. [41]). Каждый коэффициент разложения Лорана в произвольной точке прямой равен сумме интегралов функции φ и ее производных по некоторым координатным подпространствам. Это означает вторую часть леммы.

Л е м м а 4. Пусть число λ_0 принадлежит ровно r арифметическим прогрессиям леммы 3. Пусть для определенности это — первые r прогрессий, и $\lambda_0 = -(m_1+l_1+1)/k_1 = \dots = -(m_r+l_r+1)/k_r$, где $l_1, \dots, l_r$ — некоторые неотрицательные целые числа. Тогда коэффициент при $(\lambda-\lambda_0)^{-r}$ разложения Лорана в точке λ_0 функции F равен

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^r \frac{1}{k_j} \frac{1}{l_j!} \left(\int_{\substack{x_j=0 \\ j=1, \dots, r}} x_{r+1}^{k_{r+1}\lambda+m_{r+1}} \dots x_n^{k_n\lambda+m_n} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{l_1+\dots+l_r}\varphi}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_r^{l_r}}(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) dx_{r+1} \dots dx_n \right)_{\lambda=\lambda_0}, \end{aligned}$$

где $\left(\int\right)_{\lambda=\lambda_0}$ означает аналитическое продолжение интеграла в скобках в точку λ_0 .

Лемма 4 — следствие формулы (9).

Л е м м а 5. 1. Пусть $\beta = \max\{-(m_1+1)/k_1, \dots, -(m_n+1)/k_n\}$ — максимальное число объединения арифметических прогрессий леммы 3. Предположим, что число β принадлежит ровно r арифметическим прогрессиям леммы 3. Предположим, что амплитуда φ в интегралах F_+ , F_- неотрицательна и положительно ее значение в начале координат. Тогда положительна сумма коэффициентов, стоящих при $(\lambda-\beta)^{-r}$ в разложениях Лорана функций F_+ и F_- , и каждый из этих коэффициентов неотрицателен.

2. Пусть среди чисел $k_1, \dots, k_n$ в точности одно равно 1. Пусть это — k_1 . Пусть λ_0 — число, принадлежащее первой прогрессии леммы 3 и не принадлежащее ни одной другой прогрессии леммы 3. В частности, это означает, что $\lambda_0 = -(m_1 + l + 1)$, где l — неотрицательное целое число. Обозначим через a^+ , a^- коэффициенты, стоящие при $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ в разложениях Лорана в точке λ_0 соответственно функций F_+ , F_- . Тогда $a^+ = (-1)^l a^-$.

3. Пусть f имеет минимум в начале координат, т. е. $f = +x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, где все показатели четны. Тогда $F_-(\lambda) \equiv 0$. Кроме того, если β , r , φ — те же, что и в пункте 1, то больше нуля коэффициент, стоящий при $(\lambda - \beta)^{-r}$ в разложении Лорана функции F_+ .

Эта лемма — очевидное следствие леммы 4 и разбиения интегралов F_+ , F_- в сумму интегралов по координатным октантам.

В. Асимптотики элементарного осциллирующего интеграла.

Теорема 3 (ср. [18]). 1. Элементарный осциллирующий интеграл (см. (5) на стр. 159) при $\tau \rightarrow +\infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi) \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k, \quad (10)$$

где числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды φ , а параметр α пробегает арифметические прогрессии леммы 3. Если число α принадлежит ровно r арифметическим прогрессиям леммы 3, то $a_{k,\alpha} \equiv 0$ при $k \geq r$.

2. Пусть $\beta = \max \{-(m_1 + 1)/k_1, \dots, -(m_n + 1)/k_n\}$ — максимальное число объединения арифметических прогрессий леммы 3. Пусть r — число арифметических прогрессий леммы 3, которым принадлежит β . Предположим, что β не является нечетным целым числом. Предположим, что амплитуда φ неотрицательна и положительно ее значение в начале координат. Тогда вещественная часть числового коэффициента старшего члена асимптотического ряда (т. е. вещественная часть числа $a_{r-1,\beta}$) не равна нулю и имеет тот же знак, что и число $\cos(\pi\beta/2)$, таким образом, знак вещественной части определяется числом β .

3. Пусть $k_1 = 1$ и m_1 четно, т. е. пусть гиперповерхность $x_1 = 0$ не принадлежит критическому множеству фазы элементарного интеграла и не принадлежит подмножеству, на котором подынтегральное выражение элементарного интеграла не является гладким. Тогда в разложении (10) число α пробегает только арифметические прогрессии леммы 3 с номерами 2, $\dots$, n .

4. Пусть фаза элементарного интеграла имеет минимум в начале координат, т. е. пусть $f = +x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, где все показатели четны. Пусть амплитуда φ неотрицательна и положительно ее значение в начале координат. Тогда числовой коэффициент старшего

члена асимптотического ряда (т. е. число $a_{r-1, \beta}$) не равен нулю и имеет тот же аргумент, что и число $\exp(-\pi i \beta / 2)$, где числа β, r определены в пункте 1; таким образом, аргумент коэффициента определяется числом β .

Теорема 3 легко выводится из теорем 1, 2, лемм 3, 5 с помощью следующих стандартных формул. Пусть $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем, тождественно равная 1 в окрестности начала координат. Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$ с точностью до бесконечно малой сколь угодно высокого порядка

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{i\tau t} t^{\alpha} (\ln t)^k \theta(t) dt &\approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(-i\tau)^{\alpha+1}}, \\ \int_{-\infty}^0 e^{i\tau t} (-t)^{\alpha} (\ln(-t))^k \theta(t) dt &\approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(i\tau)^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

В этих формулах $\arg(\pm i\tau) = \pm \pi/2$, Γ — гамма-функция (см. [96]).

Г. Асимптотики элементарного интеграла Лапласа.

О п р е д е л е н и е. Элементарным интегралом Лапласа называется интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}} |x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}| \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $k_1, \dots, k_n, m_1, \dots, m_n$ — неотрицательные целые числа, $k_1, \dots, k_n$ четны, $k_1 + \dots + k_n \geq 2$, φ — гладкая функция с компактным носителем, τ — вещественный параметр.

Т е о р е м а 4. 1. Элементарный интеграл Лапласа при $\tau \rightarrow +\infty$ разлагается в асимптотический ряд (10), обладающий свойствами, указанными в заключении пункта 1 теоремы 3.

2. Пусть амплитуда φ неотрицательна и положительно ее значение в начале координат. Тогда в асимптотическом ряде элементарного интеграла Лапласа положителен числовой коэффициент при старшем члене (т. е. коэффициент $a_{r-1, \beta}$), где числа r, β определены в пункте 2 теоремы 3.

Доказательство теоремы 4 совпадает с доказательством теоремы 3, ссылки на формулы (11) нужно заменить ссылками на формулу (см. [96])

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau t} t^{\alpha} (\ln t)^k \theta(t) dt \approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha+1}}.$$

7.3. Асимптотики и разрешение особенностей.

А. В е с р а з р е ш е н и я о с о б е н н о с т е й и н а б о р к р а т н о с т е й. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, аналитическую в окрестности своей критической точки x . Предположим, что

значение функции в этой точке равно 0. Рассмотрим разрешение особенностей этой критической точки (см. п. 6.4). Введем характеристики разрешения особенностей, через которые выразим показатель осцилляции критической точки, его кратность и множество показателей.

Разрешение особенностей — это многообразие Y и его отображение $\pi: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, обладающие свойствами, указанными в п. 6.4. В малой окрестности прообраза критической точки x рассмотрим разложение на неприводимые компоненты гиперповерхности нулевого уровня функции $f \circ \pi$. С каждой неприводимой компонентой, пересекающейся с прообразом точки x , корректно связаны два неотрицательных целых числа: кратности нулей на этой компоненте соответственно функции $f \circ \pi$ и якобиана отображения π . Эти числа обозначим соответственно через k , m . Упорядоченная пара (k, m) называется *кратностью компоненты*, число $-(m+1)/k$ называется *весом компоненты*.

О п р е д е л е н и е. *Набором кратностей* разрешения особенностей называется множество всех попарно различных кратностей, обладающих свойством: $(k, m) \neq (1, 0)$, $k > 0$.

Набор кратностей обозначим через K_p .

О п р е д е л е н и е. *Весом разрешения особенностей* называется максимум весов компонент, кратности которых обладают свойством: $(k, m) \neq (1, 0)$, $k > 0$. Таким образом, вес разрешения равен числу $\max \{-(m+1)/k | (k, m) \in K_p\}$.

З а м е ч а н и е. Набор кратностей конечен в силу собственности отображения π .

П р и м е р. Пусть f — однородный многочлен степени N , имеющий в начале координат конечнократную критическую точку. Пусть $\pi: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ — σ -процесс в начале координат (см. п. 4.3, а также § 4 главы II в [115]). Это отображение разрешает особенности многочлена в начале координат. Набор кратностей разрешения состоит из одной пары $(N, n-1)$. Вес разрешения равен $-n/N$.

Определим понятие кратности числа относительно разрешения особенностей. Для этого сначала определим понятие кратности числа в точке прообраза критической точки.

Пусть α — число, y — точка прообраза (относительно отображения разрешения) критической точки x . Рассмотрим малую окрестность точки y и разложение в ней на неприводимые компоненты гиперповерхности нулевого уровня функции $f \circ \pi$. *Кратностью числа α в точке y* называется число пересекающихся в ней неприводимых компонент веса α . *Кратностью числа α относительно разрешения особенностей* называется максимум кратностей числа α в точках прообраза критической точки x . Очевидно, что кратность числа является целым числом, заключенным в пределах от 0 до n .

П р и м е р. Рассмотрим критическую точку и ее разрешение, указанные в предыдущем примере. Пусть $n \neq N$. Тогда кратность

числа — n/N относительно указанного разрешения равна 1. Кратность числа —1 равна 0, если функция f знакоопределена, и равна 1 в противном случае. Кратности остальных чисел равны 0.

Б. Асимптотический ряд осциллирующего интеграла.

Теорема 5 (см. [18]). Рассмотрим осциллирующий интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Предположим, что фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки. Предположим, что значение фазы в этой критической точке равно 0. Рассмотрим разрешение особенностей критической точки. Утверждается: если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности критической точки фазы, то

1. Осциллирующий интеграл разлагается в асимптотический ряд

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi) \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

Числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды. Носитель каждой обобщенной функции лежит в критическом множестве фазы. Параметр α пробегает следующие арифметические прогрессии. Одна из них — отрицательные целые числа, а другие параметризуются элементами набора кратностей разрешения особенностей критической точки фазы. Паре (k, m) отвечает арифметическая прогрессия $-(m+1)/k, -(m+2)/k, \dots$

2. Обобщенная функция $a_{k,\alpha}$ тождественно равна нулю, если k не меньше кратности числа α относительно разрешения особенностей.

3. Если вес разрешения особенностей критической точки фазы больше —1, то

а) показатель осцилляции критической точки фазы равен весу разрешения особенностей;

б) кратность показателя осцилляции критической точки фазы равна уменьшенной на 1 кратности числа, равного весу разрешения особенностей, относительно разрешения особенностей;

в) если амплитуда неотрицательна и ее значение в критической точке фазы положительно, то отличен от нуля числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла (т. е. коэффициент $a_{K,\beta}$, где β — показатель осцилляции, K — кратность показателя осцилляции);

г) если критическая точка фазы конечнократна, то числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы.

4. Если критическая точка фазы является точкой максимума или минимума, то справедливы заключения а) — г) п. 3 теоремы.

5. Обозначим через π отображение разрешения особенностей. Предположим, что не найдется точки из прообраза критической точки фазы, в которой пересекаются хотя бы две неприводимые компоненты гиперповерхности нулевого уровня функции $f \circ \pi$, кратности которых равны $(1, 0)$. (Отметим, что это предположение выполняется, если фаза имеет конечнократную критическую точку (если $n=2$, нужно дополнительно исключить случай невырожденной критической точки).) Тогда параметр α в асимптотическом ряде осциллирующего интеграла пробегает только арифметические прогрессии пункта 1 теоремы, параметризованные элементами набора кратностей разрешения особенностей. В частности, показатель осцилляции критической точки фазы не больше веса разрешения особенностей.

6. Пусть β — вес разрешения особенностей, k — кратность числа β относительно разрешения особенностей. Рассмотрим множество всех точек прообраза (относительно отображения разрешения особенностей), в которых кратность числа β равна k . Предположим, что это множество не пересекается ни с одной неприводимой компонентой гиперповерхности нулевого уровня функции $f \circ \pi$, кратность которой равна $(1, 0)$. Предположим, что выполняются условия пункта 5. Предположим, что вес разрешения особенностей не является нечетным целым числом. Тогда справедливы заключения а) — г) пункта 3 теоремы.

7. Предположим, что вес разрешения особенностей равен -1 и кратность числа -1 относительно разрешения особенностей не меньше 2. Тогда показатель осцилляции критической точки фазы равен -1 . Более того, кратность показателя осцилляции равна кратности числа -1 относительно разрешения особенностей или на 1 меньше кратности числа -1 .

З а м е ч а н и я. 1. Эта теорема влечет теорему 6.3 об асимптотическом разложении.

2. Разрешение особенностей критической точки определено неоднозначно. Однако, если для одного разрешения вес больше -1 , то для всякого другого разрешения вес тоже больше -1 и не зависит от разрешения (п. 3 теоремы 5). Интересно было бы найти чисто алгебраическое доказательство этого факта.

3. Практически всегда критическая точка имеет разрешение особенностей веса больше -1 . Достаточные условия для этого см. в теореме 8.5, а также в дополнении г) теоремы 6.4.

4. В п. 9.2 (см. также [18]) приведен пример критической точки и ее разрешения особенностей, обладающих свойствами: вес разрешения меньше -1 , показатель осцилляции меньше веса разрешения.

5. Вернемся к задаче о восстановлении значения функции φ в критической точке функции f по интегралам функции φ вдоль

гиперповерхностей уровня функции f , см. п. 6.3. Для конечнократной критической точки функции f , удовлетворяющей условиям одного из п. 3, 4, 6 теоремы 5, эта задача может быть решена следующим образом. В качестве плотности на гиперповерхностях уровня функции f возьмем дифференциальную $(n-1)$ -форму Гельфанда—Лере $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n/df$. Таким образом, зная функцию Гельфанда—Лере $J(t) = \int_{f=t} \varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n/df$, нужно

восстановить значение функции φ в критической точке. Согласно формуле (4) на стр. 159 осциллирующий интеграл—это преобразование Фурье функции Гельфанда—Лере. Поэтому утверждение 3, г) теоремы 5 дает решение задачи.

П р и м е р. Пусть f — однородный многочлен степени N , имеющий в начале координат конечнократную критическую точку. Разрешение особенностей этой критической точки указано в примере на стр. 165. Набор кратностей разрешения состоит из пары $(N, n-1)$. Согласно теореме 5 в асимптотическом разложении осциллирующего интеграла с фазой f параметр α пробегает арифметическую прогрессию $-n/N, -(n+1)/N, \dots$. Если $N > n$ (или f знакоопределен), то показатель осцилляции критической точки равен $-n/N$, кратность показателя осцилляции равна 0.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Сделаем в осциллирующем интеграле замену переменных с помощью отображения $\pi: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ разрешения особенностей. Тогда интеграл преобразуется в интеграл по Y . Воспользовавшись достаточно мелким разбиением единицы, преобразуем последний интеграл в сумму элементарных интегралов (это возможно, поскольку π — разрешение особенностей).

Теперь пп. 1, 2 теоремы 5 непосредственно следуют из пункта 1 теоремы 3. Аналогично пп. 3, 4, 5, 6 теоремы 5 следуют соответственно из пп. 2, 4, 3, 2 теоремы 3.

Докажем п. 7. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f} \varphi dx = \int_0^\infty e^{i\tau t} J(t) dt + \int_0^\infty e^{-i\tau t} J(-t) dt,$$

где J — функция Гельфанда—Лере. Используя разрешение особенностей и теорему 2, получаем

$$J(\pm t) \approx a_{r,0}^\pm (\ln t)^r + \dots + a_{0,0}^\pm + \sum_{\alpha > 0} t^\alpha (\ln t)^k a_{k,\alpha}^\pm,$$

где $(r+1)$ — кратность числа -1 относительно разрешения особенностей, $a_{k,\alpha}^\pm$ — вещественные числа. Если амплитуда знакопостоянна и отлична от нуля в критической точке фазы, то согласно лемме 7 числа $a_{r,0}^\pm$ имеют один и тот же знак, их сумма отлична от нуля. Применяя формулы (11) на стр. 164, убеждаемся, что

в асимптотическом разложении осциллирующего интеграла вещественная часть коэффициента, стоящего при $(\ln \tau)^{r-1}/\tau$, пропорциональна $a_{r,0}^+ + a_{r,0}^-$, а коэффициент, стоящий при $(\ln \tau)^r/\tau$, пропорционален $a_{r,0}^+ - a_{r,0}^-$, причем коэффициенты пропорциональности отличны от нуля. П. 7 доказан.

З а м е ч а н и е. Предположения пп. 3, 4, 6 теоремы 5 нужны для того, чтобы на старший член асимптотического ряда не влияли точки неособой части гиперповерхности нулевого уровня функции f .

В. А с и м п т о т и к и интеграла Лапласа. Интегралом Лапласа называется интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n,$$

где τ — положительный вещественный параметр. Функции f , φ называются соответственно *фазой* и *амплитудой*.

Предположим, что фаза имеет точку минимума и является аналитической функцией в окрестности точки минимума. Предположим, что значение фазы в точке минимума равно нулю.

Т е о р е м а 6. Если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности точки минимума, то при $\tau \rightarrow +\infty$ интеграл Лапласа разлагается в асимптотический ряд

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi) \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k,$$

для которого справедливы заключения пп. 1, 2, 4 теоремы 5.

Доказательство теоремы 6 получается из доказательства теоремы 5 заменой ссылок на теорему 3 ссылками на теорему 4.

С л е д с т в и е. Для каждого малого положительного t обозначим через $V(t)$ объем множества тех точек, в которых значение фазы меньше t . Тогда при $t \rightarrow +0$ функция V разлагается в асимптотический ряд

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{-\alpha} (\ln t)^k.$$

Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, составленных из отрицательных рациональных чисел. Этими арифметическими прогрессиями являются прогрессии п. 1 теоремы 5. О коэффициентах ряда и о порядке главного члена ряда справедливы утверждения заключения пп. 2, 4 теоремы 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. Производная функции V равна функции Гельфанда — Лере фазы f и единичной амплитуды.

7.4. Рациональность наибольших показателей особенности $\beta_i(n)$, определенных в п. 6.8. Рассмотрим многочлен степени N с неопределенными коэффициентами и с нулевыми свободными и линей-

ными членами

$$f(x, a) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ 1 < |k_1 + \dots + k_n| \leq N}} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

При фиксированных вещественных коэффициентах a многочлен определяет функцию $f(\cdot, a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, имеющую в начале координат критическую точку. Согласно теореме 5 существует арифметическая прогрессия, содержащая множество показателей этой критической точки.

Теорема 7. *Существует единая арифметическая прогрессия, содержащая множество показателей критических точек в начале координат фаз $f(\cdot, a)$ при всех a .*

Теорема 7 следует из леммы 8.

Лемма 8. *Предположим, что в пространстве коэффициентов многочлена f выделено полуалгебраическое множество A . Тогда существуют его собственное алгебраическое подмножество $B \subset A$ и арифметическая прогрессия Q , обладающие свойством: для любого $a \in A \setminus B$ множество показателей критической точки в начале координат фазы $f(\cdot, a)$ принадлежит Q .*

Доказательство. Можно считать, что A неособо и связно. Пусть f' — ограничение многочлена f на многообразие $\mathbb{R}^n \times A$. Рассмотрим разрешение особенностей $\pi: Y \rightarrow \mathbb{R}^n \times A$ гиперповерхности нулевого уровня функции f' ; см. [106]. Из теоремы Сарда — Бертини следует существование собственного алгебраического подмножества $B \subset A$, обладающего свойством: для любого $a \in A \setminus B$ ограничение отображения разрешения особенностей на прообраз множества $\mathbb{R}^n \times a$ является разрешением особенностей гиперповерхности нулевого уровня функции $f(\cdot, a): \mathbb{R}^n \times a \rightarrow \mathbb{R}$, более того, топология этого разрешения и все кратности локально постоянно зависят от a . Теперь лемма следует из теоремы 5.

§ 8. Асимптотики и многогранники Ньютона

Мы рассматриваем класс критических точек фаз, ряд Тейлора которых имеет фиксированный многогранник Ньютона. Если многогранник Ньютона далекий, то почти все критические точки класса имеют единый показатель осцилляции. Этот единый показатель осцилляции равен удаленности многогранника Ньютона. Критическая точка класса имеет типичный показатель осцилляции, если $\mathbb{R}$ -невырождена главная часть ее ряда Тейлора. (Напомним, что условия $\mathbb{R}$ -невырожденности — явно выписываемые алгебраические условия на конечное множество коэффициентов Тейлора; см. п. 6.2.) Сформулированное утверждение составляет теорему 6.4. Ее доказательство — цель настоящего параграфа. Доказательство использует разрешение особенностей критических точек фаз. В предыдущем параграфе мы определили числовую характеристику раз-

решения особенностей — вес и доказали: если вес больше —1, то показатель осцилляции критической точки равен весу (теорема 7.5). В этом параграфе мы построим многообразие и его отображение на $\mathbb{R}^n$, которые разрешают особенности почти всех критических точек рассматриваемого класса. Мы докажем, что вес построенного разрешения особенностей равен удаленности многогранника Ньютона. Таким образом мы докажем теорему 6.4.

Разрешение особенностей строится по многограннику Ньютона и состоит из трех этапов. На первом этапе по многограннику Ньютона строится разбиение положительного октанта пространства на выпуклые конусы, каждый из которых задается конечным множеством линейных условий с рациональными коэффициентами. На втором этапе конусы измельчают, чтобы построить новое разбиение положительного октанта. Новое разбиение вписано в предыдущее, все его конусы симплицимальны и кратность их равна 1 (определения см. в п. 8.1.А). На третьем этапе по новому разбиению строят многообразие и его отображение на $\mathbb{R}^n$. Многообразие и отображение разрешают особенности почти всех критических точек рассматриваемого класса.

Каждый этап использует лишь результат предыдущего этапа: на втором этапе не используется многогранник Ньютона, на третьем этапе не используется первое разбиение. На первом и третьем этапе начальные данные однозначно определяют результат. Результат второго этапа (новое разбиение) не определяется однозначно первоначальным разбиением. Таким образом разрешение особенностей не определяется однозначно многогранником Ньютона, хотя строится по многограннику Ньютона.

Мы изложим сначала третий этап. Мы построим многообразие по набору конусов с упомянутыми выше свойствами и определим его естественную проекцию на $\mathbb{R}^n$ (см. п. 8.1.Е). Затем мы изложим первые два этапа и докажем, что построенные в результате трех этапов многообразие и отображение разрешают особенности критических точек класса с $\mathbb{R}$ -невырожденными главными частями рядов Тейлора. В заключение мы выведем теорему 6.4 из теоремы 7.5.

На многообразии, которое будет построено в этом параграфе, естественным образом действует группа — n -мерный тор (подробнее см. в п. 8.1.Г). Многообразия с действием тора называются торическими. Далеко продвинутую теорию торических многообразий см. в [168, 240]. Орбиты действия тора на торическом многообразии находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторой совокупностью выпуклых конусов, строящихся по многообразию. В свою очередь эта совокупность конусов однозначно определяет торическое многообразие. Наш третий этап построения разрешения особенностей является этим стандартным (в теории торических многообразий) переходом от совокупности конусов к многообразию. Торические многообразия замечательны тем, что большинство аналитических и топологических конструкций на них сво-

дится к линейно алгебраическим конструкциям на соответствующей совокупности конусов. Например, см. в этом параграфе наше вычисление веса разрешения особенностей.

К исследованию особенностей многогранники Ньютона впервые были применены в [66, 171]. С многогранниками Ньютона торические многообразия впервые были связаны А. Г. Хованским (см. [11, 107, 108], а также [18, 231]).

8.1. Построение многообразия.

А. Конус, скелет, кратность, веер. Конусом, порожденным векторами $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$, называется конус, состоящий из линейных комбинаций этих векторов с неотрицательными

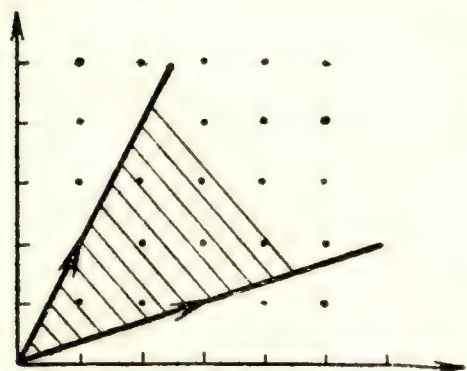


Рис. 66.

коэффициентами. Конус с вершиной в начале координат называется *рациональным*, если он может быть порожден конечным множеством векторов с целыми координатами. *Скелетом* рационального конуса называется множество всех примитивных (не кратных) целочисленных векторов в гранях размерности 1. Очевидно, что скелет конуса порождает сам конус.

Пример. Конус, изображенный на рис. 66, является рациональным. Его скелет составляют векторы $(3,1)$, $(1,2)$.

Рациональный конус называется *симплициальным*, если линейно независимы векторы, составляющие его скелет.

Кратностью симплициального конуса старшей размерности n называется индекс подрешетки, порожденной векторами скелета, в целочисленной решетке пространства. Очевидно, что кратность конуса равна 1 тогда и только тогда, когда его скелет образует базис целочисленной решетки пространства. Более того, если кратность больше 1, то конусу принадлежит целочисленный вектор, являющийся такой линейной комбинацией векторов скелета, в которой все коэффициенты неотрицательны, меньше 1 и хотя бы один коэффициент не равен 0.

Пример. Конус, изображенный на рис. 1, симплициален (все двумерные рациональные конусы симплициальны). Кратность конуса равна 5.

Задача. Докажите, что кратность конуса равна модулю определителя, составленного из координат векторов скелета.

Веером называется конечное множество рациональных конусов, обладающих свойствами:

а) каждая грань конуса из множества тоже принадлежит множеству;

б) пересечение любых двух конусов из множества является гранью каждого из них:

Веер называется *простым*, если

в) все конусы веера симплициальны, и скелет любого конуса можно дополнить до базиса целочисленной решетки всего пространства.

Б. Мономиальные отображения. Рациональное отображение $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ вида $x_i \circ h = x_1^{a_i^1} \dots x_n^{a_i^n}$, $i = 1, \dots, n$, где a_i^j — целочисленная матрица с определителем равным ± 1 , называется *мономиальным*. Область определения мономиального отображения всегда содержит дополнение объединения координатных гиперплоскостей.

Очевидно, что отображение, обратное к мономиальному, мономиально и задается обратной матрицей. Область определения мономиального отображения совпадает со всем пространством тогда и только тогда, когда матрица мономиального отображения имеет неотрицательные элементы.

Пусть задана упорядоченная пара базисов целочисленной решетки пространства $\mathbb{R}^n$. Мономиальное отображение называется *ассоциированным* с этой парой, если оно задается матрицей сопряженного оператора к оператору, переводящему второй базис в первый и записанному во втором базисе. Таким образом, в столбцах стоят координаты векторов первого базиса, выраженных через второй базис.

Пример. Пусть в целочисленной решетке пространства $\mathbb{R}^2$ заданы два базиса: первый — $(1,0)$, $(1,1)$, второй — $(1,0)$, $(0,1)$. Тогда мономиальное отображение h , ассоциированное с этой парой, задается формулой

$$x_1 \circ h = x_1^1 x_2^1, \quad x_2 \circ h = x_1^0 x_2^1.$$

Лемма 1. Если изменить порядок в паре, то ассоциированное с парой мономиальное отображение изменится на обратное. Если заданы три базиса, то отображение, ассоциированное с первым и

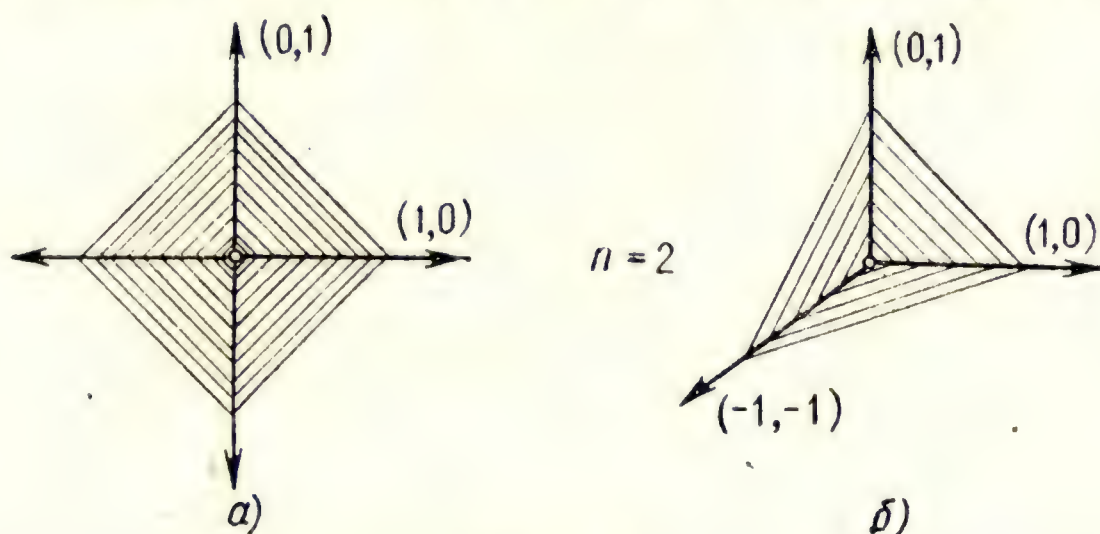


Рис. 67.

третьим базисом, равно суперпозиции отображения, ассоциированного с первым и вторым базисами, и отображения, ассоциированного со вторым и третьим базисами. А именно, $h_{1,3} = h_{2,3} \circ h_{1,2}$.

Доказательство очевидно.

В. Многообразие, ассоциированное с простым веером. Пусть задан простой веер. По вееру мы построим неособое n -мерное вещественное аналитическое многообразие. Конструкция многообразия обобщает построение стандартных компак-

тификаций пространства $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$. А именно, для вееров, указанных на рис. 67, а, б, конструкция приводит соответственно к многообразиям $(\mathbb{R}P^1)^n$, $\mathbb{R}P^n$.

Карты многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с n -мерными конусами веера. Каждая карта — это $\mathbb{R}^n$. Мы введем отношение эквивалентности для точек разных карт. Затем на множестве классов эквивалентности введем топологию и структуру многообразия.

Нам удобно для каждого конуса веера упорядочить векторы его скелета. Зафиксируем эти порядки. Впоследствии будет легко убедиться, что многообразие, которое мы построим, не зависит от этих порядков.

С любой упорядоченной парой карт связано мономиальное отображение из первой карты во вторую — это мономиальное отображение, ассоциированное с упорядоченной парой базисов целочисленной решетки пространства, где первый (соответственно второй) базис — это базис, порожденный скелетом того n -мерного конуса, который отвечает первой (соответственно второй) карте. Для будущего многообразия это мономиальное отображение будет играть роль функции перехода из первой карты во вторую.

Скажем, что точка первой карты *эквивалентна* точке второй карты, если мономиальное отображение, связанное с этими картами, определено в точке первой карты и переводит эту точку в упомянутую точку второй карты.

Пример. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ скелет первого конуса составляют векторы $(1,1)$, $(1,2)$, а скелет второго конуса составляют векторы $(1,1)$, $(3,2)$. Тогда мономиальное отображение h из первой карты во вторую задано формулами $x_1 \circ h = x_1^1 x_2^4$, $x_2 \circ h = x_1^0 x_2^{-1}$. Поэтому, например, точка $(0,2)$ первой карты эквивалентна точке $(0, 1/2)$ второй карты.

Введенное отношение на парах точек будет отношением эквивалентности, если мы проверим его симметричность. Симметричность следует из леммы 2.

Лемма 2. *Мономиальное отображение, связанное с упорядоченной парой карт, обладает следующим свойством. Если задана последовательность точек первой карты, для которой выполнены условия:*

- а) *последовательность имеет конечный предел в первой карте;*
- б) *мономиальное отображение определено в точках последовательности;*
- в) *последовательность образов точек последовательности имеет конечный предел во второй карте,*
то мономиальное отображение определено и невырождено в предельной точке последовательности.

Доказательство леммы основано на том, что пересечение конусов, отвечающих двум картам, является гранью каждого из них. Достаточно разобрать случай, когда последователь-

ность точек лежит на гладкой кривой и предельная точка последовательности отвечает нулевому значению параметра кривой. Существование такой кривой следует из леммы об отборе кривых, см. [79]. Итак, пусть кривая имеет вид $x_j(t) = t^{k_j}(c_j + O(t))$, $j = 1, \dots, n$, где числа $c_1, \dots, c_n$ не равны нулю. Тогда ее образ имеет вид $x_j(t) = t^{m_j}(d_j + O(t))$, $j = 1, \dots, n$, где $m_j = \sum a_j^i k_i$ и a_j^i — матрица мономиального отображения. По условию показатели k_j, m_j неотрицательны. Согласно формулам вектор $(m_1, \dots, m_n)$ есть линейная комбинация столбцов матрицы a_j^i с коэффициентами $k_1, \dots, k_n$. По определению в столбцах стоят координаты векторов скелета конуса, отвечающего первой карте, выраженных через векторы скелета конуса, отвечающего второй карте. Неотрицательность чисел m_j означает, что указанная линейная комбинация векторов первого скелета принадлежит второму конусу. Однако пересечение конусов является гранью каждого из них. Поэтому, если в линейной комбинации коэффициент k_j отличен от нуля, то в j -м столбце матрицы мономиального отображения все элементы, кроме одного, равны 0, а оставшийся коэффициент равен 1. Положительность коэффициента k_j означает, что предельная точка кривой при $t \rightarrow 0$ лежит на гиперплоскости $x_j = 0$. Согласно доказанному выше мономиальное отображение определено и невырождено в общей точке этой гиперплоскости. Лемма доказана.

Итак, на парах точек карт задано отношение эквивалентности. Определим на множестве классов эквивалентности топологию и структуру аналитического многообразия. Каждая карта естественным образом вкладывается в качестве подмножества в множество классов эквивалентности. Скажем, что множество открыто, если открыты его пересечения со всеми картами. Из леммы 2 легко следует, что это определение задает на множестве классов эквивалентности структуру хаусдорфова топологического пространства. Вложения карт определяют покрытие топологического пространства открытыми множествами и определяют гомеоморфизмы этих множеств и $\mathbb{R}^n$. По построению функции перехода, связанные с этими гомеоморфизмами, являются мономиальными отображениями в области определения. Таким образом, по простому вееру мы построили аналитическое многообразие. Это многообразие будем называть *многообразием, ассоциированным с простым веером*.

Задача. Докажите, что $(\mathbb{R}P^1)^n$ и $\mathbb{R}P^n$ являются многообразиями, ассоциированными с веерами, изображенными соответственно на рис. 67, а, б.

Г. На многообразии, ассоциированном с простым веером, действует тор. Пространство $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ относительно покомпонентного умножения образует группу, называемую n -мерным тором. Тор действует сам на себе. Его действие естественно продолжается на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим многообразие, ассоциированное с простым веером. На картах многообразия действует тор. Легко видеть, что это действие продолжается до действия тора на всем многообразии. Опишем орбиты этого действия.

Имеется одна n -мерная орбита — изоморфная тору. В произвольной карте это $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.

$(n-1)$ -мерные орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с одномерными конусами простого веера. Действительно, каждая карта пересекается с n $(n-1)$ -мерными орбитами. Их замыкания в локальных координатах совпадают с координатными гиперплоскостями. Поставим в соответствие $(n-1)$ -мерной орбите, лежащей в гиперплоскости $x_j=0$, вектор с номером j скелета конуса, отвечающего карте. (Напомним, что векторы скелетов конусов веера упорядочены.)

Л е м м а 1. *Это соответствие корректно определяет взаимно однозначное соответствие между множеством $(n-1)$ -мерных орбит и множеством одномерных конусов простого веера.*

2. *Замыкание произвольной $(n-1)$ -мерной орбиты — $(n-1)$ -мерное подмногообразие.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим две карты многообразия и функцию перехода из первой карты во вторую. Пусть $(n-1)$ -мерная орбита, лежащая в первой карте, переходит в $(n-1)$ -мерную орбиту, лежащую во второй карте. Пусть для простоты обозначений эти орбиты и в первой, и во второй картах лежат в гиперплоскостях $x_1=0$. Докажем, что им соответствует один и тот же одномерный конус. Действительно, функция перехода — мономиальное отображение. По предположению в первом столбце матрицы мономиального отображения все элементы нулевые, кроме первого, который равен 1. Это по определению функций перехода означает, что в скелетах конусов, отвечающих двум картам, первые векторы одинаковы, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что, если в разных картах $(n-1)$ -мерные орбиты соответствуют одному и тому же одномерному конусу, то эти орбиты совпадают.

Утверждение второй части леммы тривиально. Лемма доказана.

Аналогично предыдущему устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством k -мерных орбит и $(n-k)$ -мерных конусов простого веера. Замыкания орбит являются подмногообразиями. В локальных картах — это координатные плоскости. Если одна орбита лежит в замыкании другой орбиты, то конус, отвечающий второй орбите, является гранью конуса, отвечающего первой орбите, подробнее см. в [168].

Д. О т о б р а ж е н и я м н о г о о б р а з и й, а с с о ц и и р о в а н н ы х с п р о с т ы м и в е е р а м и. Пусть заданы два веера. Скажем, что первый веер *вписан* во второй веер, если для любого конуса первого веера найдется содержащий его конус второго веера.

Рассмотрим два простых веера. Предположим, что первый веер вписан во второй веер. Рассмотрим многообразия, ассоциированные с этими веерами. Определим аналитическое отображение первого многообразия во второе. Для этого определим ограничение отображения на каждую карту первого многообразия. Рассмотрим произвольную карту первого многообразия. Карта отвечает n -мерному конусу первого веера. По предположению найдется конус второго веера, содержащий этот конус первого веера. Конус второго веера, разумеется, тоже n -мерен. Поэтому конусу второго веера отвечает карта второго многообразия. Итак, мы имеем упорядоченную пару карт. Рассмотрим связанное с этими картами мономиальное отображение из первой карты во вторую (см. п. 8.1.В). Элементы матрицы этого мономиального отображения неотрицательны, поскольку первый конус вложен во второй. Таким образом, мы определили аналитическое отображение произвольной карты многообразия, ассоциированного с первым веером, в одну из карт многообразия, ассоциированного со вторым веером.

Л е м м а 3. Эти локальные отображения согласованы и корректно определяют аналитическое отображение первого многообразия во второе.

Лемма 3 — прямое следствие леммы 1.

З а м е ч а н и е. На каждом многообразии имеется единственная n -мерная орбита действия тора. Построенное отображение устанавливает изоморфизм этих орбит.

Т е о р е м а 1 (см. [168]). Пусть заданы два простых веера, и первый веер вписан во второй. Рассмотрим ассоциированные с веерами многообразия и построенное выше отображение первого многообразия во второе. Утверждается, что, если объединение конусов первого веера содержит объединение конусов второго веера, то это отображение — собственное. Обратное тоже справедливо.

С л е д с т в и е. В условиях теоремы первое многообразие отображается на второе многообразие.

Действительно, отображение собственное и обратимо на всюду плотном множестве.

Прямая теорема следует из леммы 4. Обратная аналогична.

Л е м м а 4. Пусть в одной из карт второго многообразия задана кривая вида $x_j(t) = t^{m_j}(d_j + O(t))$, $m_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, где числа $d_1, \dots, d_n$ не равны нулю. Тогда существует карта первого многообразия, в которой прообраз кривой имеет конечный предел при $t \rightarrow 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. Нам надо подобрать карту первого многообразия и кривую в этой карте вида $x_j(t) = t^{k_j}(c_j + O(t))$, $j = 1, \dots, n$, где числа $c_1, \dots, c_n$ не равны нулю, образ которой совпадал бы с нашей кривой. Ограничимся указанием того, какую именно карту надо взять. Рассмотрим базис, образованный скелетом конуса, отвечаю-

щего карте второго многообразия. Рассмотрим линейную комбинацию этого базиса с неотрицательными коэффициентами $m_1, \dots, m_n$. В результате получится вектор, принадлежащий конусу. По условию найдется n -мерный конус первого веера, который содержит этот вектор. n -мерному конусу первого веера соответствует карта первого многообразия. В этой карте прообраз нашей кривой имеет конечный предел. Проверку этого факта оставляем читателю.

Е. Важный пример. Рассмотрим два простых веера. Предположим, что второй веер состоит из одного n -мерного конуса и его граней. Предположим, что объединение конусов первого веера совпадает с n -мерным конусом, порождающим второй веер. Согласно конструкции пункта В с каждым веером ассоциировано многообразие. Многообразие, ассоциированное со вторым веером, состоит из одной карты и изоморфно $\mathbb{R}^n$. Согласно конструкции пункта Д имеется собственное аналитическое отображение многообразия, ассоциированного с первым веером, на многообразие, ассоциированное со вторым веером, т. е. на $\mathbb{R}^n$. Это отображение обратимо вне объединения координатных гиперплоскостей.

Этот пример будет использован в п. 8.2 для построения разрешения особенностей.

Задача. Пусть $n=2$ и в качестве первого веера взят веер, изображенный на рис. 68. Докажите, что отображение на $\mathbb{R}^2$ многообразия, ассоциированного с первым веером, совпадает с σ -процессом в начале координат.

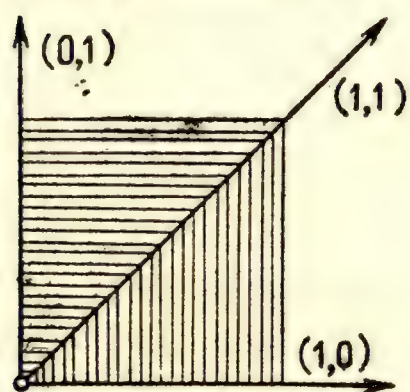


Рис. 68.

Ж. Комплексный аналог. Конструкции многообразия и отображения многообразий, изложенные в этом пункте, имеют естественный комплексно-аналитический аналог. Вместо карт, изоморфных $\mathbb{R}^n$, надо брать карты, изоморфные $\mathbb{C}^n$, и все отображения задавать теми же формулами. Видоизмененные

конструкции будут приводить к комплексно-аналитическим многообразиям и их комплексно-аналитическим отображениям. Построенные таким образом комплексные многообразия имеют естественные вещественные части. Вещественные части являются вещественными многообразиями и совпадают с многообразиями, построенными в этом пункте. Комплексно-аналитические отображения сохраняют вещественные части. Ограничения комплексно-аналитических отображений на вещественные части совпадают с отображениями, построенными в этом пункте.

8.2. Разрешение особенностей.

А. Веер, ассоциированный с многогранником Ньютона. Рассмотрим многогранник Ньютона, т. е. выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ с вершинами в точках с неотрицательными целыми координатами, который вместе с каждой точкой содержит положительный октант, параллельно перенесенный в эту точку (см. п. 6.2.А). Обозначим многогранник через Γ .

Опорной функцией многогранника Ньютона называется функция на положительном октанте пространства, сопряженного с $\mathbb{R}^n$. Ее значение на коекторе a положительного октанта полагается равным $\min_{k \in \Gamma} \langle a, k \rangle$. Опорная функция обозначается через l_Γ .

Следом на многограннике Ньютона коектора a положительного октанта называется грань многогранника, выделенная условием $\{k \in \Gamma \mid \langle a, k \rangle = l_\Gamma(a)\}$. Совместным следом коекторов положительного октанта называется пересечение их следов.

Два коектора положительного октанта называются эквивалентными относительно многогранника Ньютона, если совпадают их следы.

Л е м м а 5. Замыкание любого класса эквивалентности является рациональным конусом в пространстве, сопряженном с $\mathbb{R}^n$. Более того, совокупность всех таких конусов образует веер.

Доказательство легко следует из определения опорной функции; подробнее см. в [107].

Веер, образованный замыканиями классов эквивалентности, называется веером, ассоциированным с многогранником Ньютона. Объединение конусов, составляющих этот веер, совпадает с положительным октантом пространства, сопряженного с $\mathbb{R}^n$.

П р и м е р. На рис. 69, а изображен многогранник Ньютона в $\mathbb{R}^2$. На рис. 69, б изображен ассоциированный с ним веер.

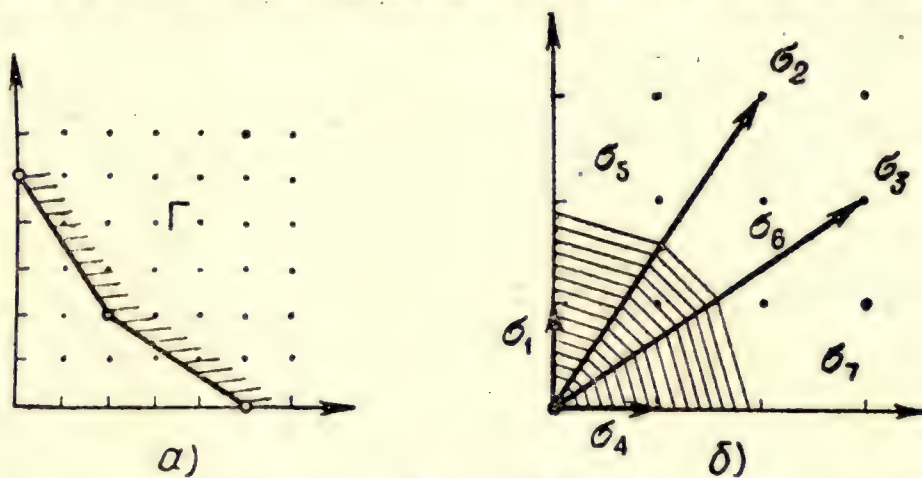


Рис. 69.

Б. Простой подчиненный веер. Простой веер в пространстве, сопряженном с $\mathbb{R}^n$, называется *подчиненным многограннику Ньютона*, если он вписан в веер, ассоциированный с многогранником, и если объединение конусов, составляющих этот простой веер, совпадает с положительным октантом.

Л е м м а 6 (см. [168]). Существует простой веер, подчиненный многограннику Ньютона.

Алгоритм построения простого веера, вписанного в заданный веер и имеющего то же объединение всех входящих в него конусов, указан на стр. 32—35 в [168]. Мы не будем подробно воспроизводить алгоритм. Укажем его основные моменты.

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе произвольным образом конусы первоначально заданного веера разбиваются на симплицальные. На втором этапе алгоритма нужно сделать кратности всех n -мерных конусов разбиения равными 1. Это делается убывающей индукцией по числу конусов с максимальной кратностью, а затем убывающей индукцией по числу, равному максимуму кратностей конусов разбиения. На каждом шаге второго

этапа надо симплициальный конус кратности больше 1 разбить на симплициальные конусы меньшей кратности. Это делается добавлением одномерного конуса, порожденного правильно подобранным целочисленным вектором. В качестве этого вектора надо взять целочисленный вектор, являющийся такой линейной комбинацией векторов скелета, в которой все коэффициенты неотрицательны, меньше 1 и хотя бы один коэффициент не равен 0.

Пример. На рис. 69, б изображен веер, ассоциированный с многогранником, изображенным на рис. 69, а. Все конусы этого веера симплициальны. Кратности конусов σ_5 , σ_6 , σ_7 равны соответственно 3, 5, 3. Пример простого веера, подчиненного указанному многограннику, изображен на рис. 70.

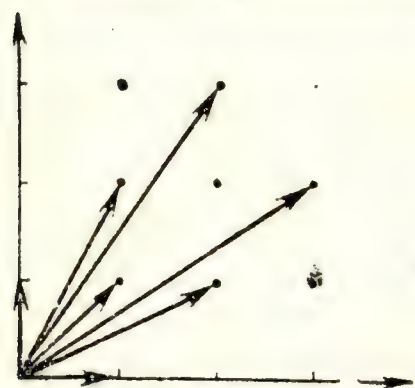


Рис. 70.

В. Теорема о разрешении особенностей. Рассмотрим простой веер, подчиненный многограннику Ньютона. С простым веером ассоциировано многообразие. Это многообразие называется *многообразием, подчиненным многограннику Ньютона*. Объединение конусов, составляющих простой веер, совпадает с положительным октантом, который, в частности, является симплициальным конусом кратности 1. Согласно конструкции 8.1.Д многообразие, подчиненное многограннику, проектируется на $\mathbb{R}^n$ (см. п. 8.1.Е). Эта проекция называется *ассоциированной с многообразием, подчиненным многограннику Ньютона*. Проекция является собственным аналитическим отображением.

Теорема 2 (о разрешении особенностей; см. [11, 18, 107, 231]). Рассмотрим сходящийся степенной ряд n переменных без свободного члена, с вещественными коэффициентами и с $\mathbb{R}$ -невырожденной главной частью. Ряд задает аналитическую функцию в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим многообразие, подчиненное многограннику Ньютона степенного ряда, и ассоциированную с многообразием проекцию многообразия на $\mathbb{R}^n$. Утверждается, что многообразие и проекция разрешают особенности в начале координат функции, заданной рядом.

Доказательство теоремы основано на двух формулируемых ниже леммах.

Г. Вспомогательные леммы. Рассмотрим два симплициальных n -мерных конуса кратности 1 в пространстве, сопряженном с $\mathbb{R}^n$. Предположим, что первый конус совпадает с положительным октантом. Предположим, что скелеты конусов упорядочены, причем скелет второго конуса упорядочен стандартным образом: $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$. Обозначим через $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$ ковектор с порядковым номером j скелета первого конуса. Скелеты конусов задают упорядоченную пару базисов целочисленной n -мерной решетки. С парой базисов ассоциировано мономиальное отображение (см. п. 8.1.Б). Обозначим его через h . Матрица

(a_i^j) этого мономиального отображения имеет неотрицательные элементы, поскольку первый конус вложен во второй. Рассмотрим степенной ряд f переменных $x_1, \dots, x_n$. Мономиальное отображение с неотрицательной матрицей индуцирует преобразование степенного ряда в степенной ряд $f \circ h$.

Л е м м а 7. 1. *Максимальная степень переменной x_j , на которую делится степенной ряд после мономиального преобразования, равна значению опорной функции многогранника Ньютона исходного степенного ряда на ковекторе с порядковым номером j скелета первого конуса.*

2. *Якобиан мономиального отображения равен с точностью до знака одночлену, в котором показатель переменной x_j равен уменьшенной на 1 сумме координат ковектора с порядковым номером j скелета первого конуса.*

3. *Диаграмма Ньютона степенного ряда после мономиального преобразования является точкой тогда и только тогда, когда все ковекторы внутреннейности первого конуса эквивалентны относительно многогранника Ньютона исходного степенного ряда.*

4. *Образ координатной гиперплоскости $x_j=0$ содержится в координатной плоскости, заданной равенствами $x_i=0$, $i \in I$, где I — множество номеров всех отличных от нуля координат ковектора с порядковым номером j скелета первого конуса.*

Доказательство очевидно.

Предположим, что степенной ряд f имеет вещественные коэффициенты и сходится. Функцию, задаваемую рядом, будем обозначать той же буквой. Рассмотрим функцию $f \circ h$ индуцированную из функции f мономиальным отображением. С каждой координатной гиперплоскостью связаны два числа: кратность нуля на гиперплоскости функции $f \circ h$ и кратность нуля на гиперплоскости якобиана мономиального отображения. Первое число обозначим через k , второе через m . Число, равное $-(m+1)/k$, называлось в § 7 весом гиперплоскости. Веса играют основную роль в теореме 7.5. Объясним геометрический смысл веса координатной гиперплоскости. Пусть для определенности это гиперплоскость, заданная уравнением $x_1=0$.

Обозначим через Γ многогранник Ньютона исходного степенного ряда. Рассмотрим гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, заданную уравнением $\langle a^1, x \rangle = l_\Gamma(a^1)$, здесь a^1 — ковектор с номером 1 скелета первого конуса, l_Γ — опорная функция многогранника Γ . Пересечение этой гиперплоскости с многогранником есть след ковектора a^1 . Гиперплоскость пересекается с биссектрисой положительного октанта ровно в одной точке $(t, \dots, t)$. Согласно лемме 7 вес координатной гиперплоскости $x_1=0$ равен $-(a_1^1 + \dots + a_n^1)/l_\Gamma(a^1) = -1/t$. (См. рис. 71). Это замечание объясняет появление в теореме 6.4 числа, равного удаленности многогранника Ньютона.

Сформулируем вторую вспомогательную лемму.

Л е м м а 8. *Предположим, что выполнены условия леммы 7. Предположим, что при мономиальном отображении h гиперплос-*

кость, заданная уравнением $x_1=0$, отображается в начало координат. Предположим, что степенной ряд f (без свободного члена) сходится и имеет $\mathbb{R}$ -невырожденную главную часть. Предположим, что все ко векторы внутренней первого конуса эквивалентны отно-

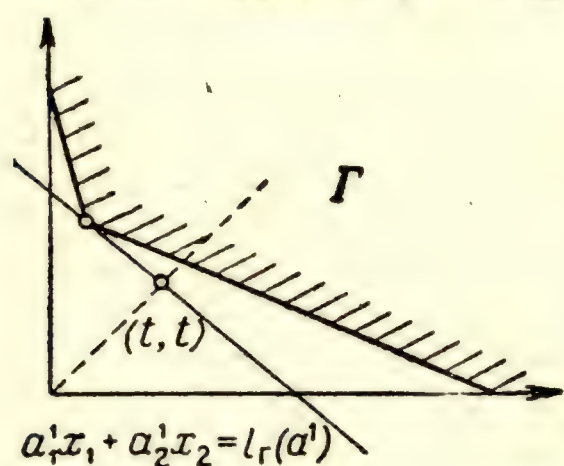


Рис. 71.

сительно многогранника Ньютона ряда f . Тогда в каждой точке гиперплоскости $x_1=0$ найдутся локальные координаты, в которых функция $f \circ h$ и якобиан отображения h равны одночленам с точностью до умножения на не обращающиеся в нуль функции.

Доказательство. Достаточно доказать, что упомянутые локальные координаты найдутся для точки, в которой первых

s евклидовых координат равны нулю, а остальные евклидовы координаты отличны от нуля. По условию ряд $f \circ h$ представим в виде $x_1^{l_\Gamma(a^1)} \dots x_n^{l_\Gamma(a^n)} (\text{const} + O(x_1, \dots, x_n))$, где $\text{const} \neq 0$ (см. пункты 1, 3 леммы 7). Перепишем ряд $f \circ h$ в виде $x_1^{l_\Gamma(a^1)} \dots x_s^{l_\Gamma(a^s)} \times \times (f_0(x_{s+1}, \dots, x_n) + O(x_1, \dots, x_s))$. Достаточно доказать, что гиперповерхность, заданная уравнением $f_0=0$, не имеет особых точек в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$. Все координаты ко вектора a^1 положительны (п. 4 леммы 7), поэтому f_0 — многочлен. Обозначим через γ совместный след ко векторов $a^1, \dots, a^s$. γ — непустая компактная грань многогранника Ньютона. Обозначим через f_γ γ -часть ряда f . Очевидно, что $f_\gamma \circ h = x_1^{l_\Gamma(a^1)} \dots x_s^{l_\Gamma(a^s)} f_0$. В силу $\mathbb{R}$ -невырожденности главной части ряда f первые частные производные γ -части не имеют общих нулей в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$. Отображение h задает диффеоморфизм $(\mathbb{R} \setminus 0)^n \rightarrow (\mathbb{R} \setminus 0)^n$, поэтому многочлены $f_0, \partial f_0 / \partial x_{s+1}, \dots, \partial f_0 / \partial x_n$ не имеют общих нулей в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$, что и требовалось доказать.

Д. Доказательство теоремы 2. Проверим выполнение трех пунктов определения разрешения особенностей, приведенных на стр. 144. Рассмотрим многообразие, подчиненное многограннику Ньютона ряда f , и ассоциированную с ним проекцию многообразия на $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме 1 проекция является собственным аналитическим отображением. Следовательно, выполнен п. 3 определения разрешения особенностей. Проекция обратима вне объединения координатных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, выполнен п. 2 определения. Наконец, п. 1 является прямым следствием леммы 8. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Разрешение особенностей в теореме 2 определяется простым веером, подчиненным многограннику Ньютона. Изменяя веер, можно наделять разрешение особенностей дополнительными свойствами. А именно, можно выбрать такой простой веер, подчиненный многограннику Ньютона, для которого отобра-

жение разрешения особенностей, указанное в теореме 2, обратимо вне гиперповерхности нулевого уровня функции, заданной степенным рядом (см. [231]). Обратимость отображения вне гиперповерхности нулевого уровня означает выполнение условия 2 на стр. 144.

Л е м м а 9. *Разрешение особенностей, указанное в теореме 2, удовлетворяет условию 2' на стр. 144, если простой веер, определяющий разрешение, обладает следующим дополнительным свойством. Конусом этого веера является всякий конус веера, ассоциированного с многогранником, если этот конус симплицален и его скелет можно дополнить до базиса целочисленной решетки.*

П р и м е р. На рис. 69—70, изображены многогранник Ньютона, ассоциированный с ним веер и простой веер, подчиненный многограннику Ньютона. Простой веер обладает свойством, указанным в лемме 9.

Лемма легко доказывается с помощью пп. 1, 4 леммы 7; см. также [231].

Л е м м а 10. *Существует простой веер, подчиненный многограннику Ньютона и обладающий свойством, указанным в лемме 9.*

Такой простой веер можно построить алгоритмом, указанным в п. 8.2.Б.

З а м е ч а н и е 2. Сформулируем комплексный аналог теоремы 2.

Т е о р е м а 2' (см. [11, 107, 231]). *Рассмотрим сходящийся степенной ряд n переменных без свободного члена, с комплексными коэффициентами и с $\mathbb{C}$ -невыврожденной главной частью. Ряд задает аналитическую функцию в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим комплексное аналитическое многообразие, подчиненное многограннику Ньютона степенного ряда, и ассоциированную с многообразием проекцию многообразия на $\mathbb{C}^n$ (см. п. 8.1.Ж). Утверждается, что многообразие и проекция разрешают особенности в начале координат функции, заданной рядом (т. е. функция, многообразие и его отображение на $\mathbb{C}^n$ обладают свойствами 1—3 на стр. 144).*

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.

Как и теорема 2, теорема 2' допускает усиление: существует такое многообразие, подчиненное многограннику Ньютона степенного ряда, для которого разрешение особенностей из теоремы 2' обладает свойством 2 на стр. 144 (см. [231]).

8.3. Приложения к осциллирующим интегралам.

А. Теорема 3 (см. [18]). *Рассмотрим осциллирующий интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Предположим, что фаза является аналитической функцией в окрестности начала координат. Предположим, что ряд Тейлора фазы

в начале координат имеет $\mathbb{R}$ -невырожденную главную часть. Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора. Рассмотрим простой веер, подчиненный этому многограннику Ньютона. Об этих объектах справедливы утверждения 1—5.

1. Множество показателей фазы в начале координат принадлежит объединению следующих арифметических прогрессий, зависящих только от веера и не зависящих от коэффициентов ряда Тейлора. Одна последовательность — это отрицательные целые числа. Остальные прогрессии параметризуются одномерными конусами веера, на которых отлична от нуля опорная функция многогранника Ньютона. Такому конусу отвечает арифметическая прогрессия $-(a^1 + \dots + a^n)/l_\Gamma(a)$, $-(1 + a^1 + \dots + a^n)/l_\Gamma(a)$, ..., где $a = (a^1, \dots, a^n)$ — примитивный вектор, порождающий конус, l_Γ — опорная функция многогранника Ньютона.

2. Показатель осцилляции фазы в начале координат не больше удаленности многогранника Ньютона.

3. Показатель осцилляции фазы в начале координат равен удаленности многогранника Ньютона, если выполнено хотя бы одно из трех условий:

а) Многогранник Ньютона является далеким.

б) Фаза имеет в начале координат максимум или минимум.

в) Обозначим через γ замыкание открытой грани многогранника Ньютона, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона (см. п. 6.2.В); требуется, чтобы γ -часть ряда Тейлора фазы в начале координат не имела нулей в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ и удаленность многогранника Ньютона не была целым нечетным числом (условие об отсутствии нулей выполняется, в частности, если γ — вершина многогранника).

4. Если выполнено хотя бы одно из условий а) — в) пункта 3 теоремы, то кратность показателя осцилляции фазы в начале координат равна кратности удаленности многогранника Ньютона (в частности, если биссектриса положительного октанта натывается на вершину многогранника Ньютона, то кратность равна $n-1$, если на ребро, то кратность равна $n-2$, и т. д.). Если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат, амплитуда знакопостоянна и отлична от нуля в начале координат, то отличен от нуля числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла (т. е. коэффициент $a_{K, \beta}$ ряда (2) на стр. 133).

5. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий а) — в) пункта 3 теоремы. Предположим, что фаза имеет конечнократную критическую точку в начале координат и носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности начала координат. Тогда числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла (т. е. коэффициент $a_{K, \beta}$ ряда (2) на стр. 133) равен значению амплитуды в начале координат, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы.

6. Предположим, что удаленность многогранника Ньютона равна -1 . Тогда показатель осцилляции фазы в начале координат равен -1 , если выполнено хотя бы одно из двух условий:

а) Открытая грань, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона, имеет размерность меньше $n-1$.

б) Замыкание γ открытой грани, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона, компактно, и γ -часть ряда Тейлора имеет нули на $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.

Более того, в этом случае кратность показателя осцилляции фазы в начале координат равна кратности удаленности многогранника Ньютона или на 1 меньше кратности удаленности. Если условия а), б) выполнены одновременно, то кратность показателя осцилляции равна кратности удаленности.

З а м е ч а н и я. 1. Теорема 6.4 и ее добавления а), б), е), ж) — следствия сформулированной теоремы.

2. В п. 1 теоремы указан способ построения арифметических прогрессий. Существует иной способ построения подобных прогрессий. Этот способ использует только многогранник Ньютона и не использует простого веера, подчиненного многограннику. Способом можно пользоваться, если фаза имеет в начале координат конечнократную критическую точку и ряд Тейлора фазы имеет невырожденную главную часть. Способ основан на следующей теореме Мальгранжа. С каждой конечнократной критической точкой функции связан линейный оператор монодромии в исчезающих в точке гомологиях (см. главу 1). С каждым корнем λ характеристического многочлена оператора монодромии свяжем арифметическую прогрессию всех чисел α , для которых $\exp(2\pi i \alpha) = \lambda$. Теорема Мальгранжа (см. § 11) утверждает: множество показателей критической точки содержится в объединении построенных прогрессий. В теореме 3.13 указана формула, выражающая характеристический многочлен оператора монодромии через многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Будем предполагать, что $f(0)=0$. С простым веером из теоремы ассоциировано многообразие, подчиненное многограннику Ньютона ряда Тейлора. Это многообразие и ассоциированная с ним проекция разрешают особенности фазы в начале координат (теорема 2). Применим теорему 7.5. Для доказательства п. 1 теоремы нужно указать набор кратностей разрешения особенностей, т. е. нужно указать кратности неприводимых компонент гиперповерхности нулевого уровня фазы, поднятой на многообразие, разрешающее особенности. В локальной карте многообразия поднятая фаза равна произведению одночлена и функции с неособой гиперповерхностью нулевого уровня (см. лемму 8); кроме того, якобиан отображения разрешения равен одночлену (лемма 7). Поэтому в локальной карте неприводимыми компонентами с кратностями, не равными $(1, 0)$ (см. п. 7.9), являются те координатные гиперплоскости, на которых кратность

нуля поднятой фазы больше 1. Лемма 7 выражает на гиперплоскости кратности нулей поднятой фазы и якобиана разрешения через соответствующий примитивный ковектор одномерного конуса простого веера. Теперь п. 1 теоремы следует из теоремы 7.5 и леммы 7.

Обратим внимание на геометрический смысл первого числа арифметической прогрессии, отвечающей примитивному ковектору одномерного конуса (см. замечание после леммы 7). Это первое число равно взятой с минусом обратной величине параметра пересечения биссектрисы положительного октанта и гиперплоскости, заданной ковектором и опирающейся на многогранник. Поэтому среди первых чисел арифметических прогрессий, указанных в п. 1 теоремы, непременно есть число, равное удаленности многогранника. А именно, удаленность есть первое число арифметической прогрессии, отвечающей всякому ковектору, след которого содержит центр границы многогранника.

Докажем п. 2. Если удаленность многогранника Ньютона равна -1 , п. 2 следует из п. 1 теоремы 7.5. Если удаленность меньше -1 , то ряд Тейлора фазы не делится ни на одну из переменных. Согласно леммам 7, 8 это означает, что выполнены условия п. 5 теоремы 7.5. Теперь п. 2 теоремы следует из п. 5 теоремы 7.5. Случай, в котором удаленность многогранника Ньютона больше -1 , разбирается при доказательстве п. 3.

П. 3, а) теоремы следует из п. 3 теоремы 7.5, поскольку в этом случае вес разрешения больше -1 и равен удаленности многогранника Ньютона. П. 3, б) следует из п. 4 теоремы 7.5.

Пп. 4, а) и 4, б) будут следовать из пп. 3, 4 теоремы 7.5, если будет доказано, что кратность веса разрешения равна кратности удаленности многогранника Ньютона. Для доказательства отметим следующий очевидный факт. Рассмотрим все конусы простого веера, подчиненного многограннику Ньютона, которые обладают свойством: следы всех ковекторов, составляющих конус, содержат центр границы многогранника Ньютона. Тогда максимум размерностей указанных конусов равен увеличенной на 1 кратности удаленности многогранника Ньютона. Теперь требуемое утверждение следует из леммы 7.

Пп. 5, а) и 5, б) следуют соответственно из пп. 3, г) и 4, г) теоремы 7.5. Пп. 3, в, 4, в), 5, в) следуют из п. 6 теоремы 7.5. П. 6 следует из п. 7 теоремы 7.5. Теорема доказана.

Согласно теореме 3 порядок осциллирующего интеграла равен удаленности многогранника Ньютона фазы, если амплитуда знакопостоянна и ее значение в критической точке фазы отлично от нуля. Сформулируем утверждение, описывающее порядок интеграла в случае, когда амплитуда обращается в нуль в критической точке фазы.

Пусть заданы два многогранника Ньютона. Назовем *коэффициентом вложения* первого многогранника во второй нижнюю грань

следующего множества положительных чисел. Число принадлежит множеству, если гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом растяжения, равным числу, переводит первый многогранник внутрь второго.

Поставим в соответствие амплитуде осциллирующего интеграла многогранник Ньютона ее ряда Тейлора, умноженного на произведение всех переменных. Таким образом, мы имеем два многогранника: этот многогранник и многогранник Ньютона ряда Тейлора фазы. Назовем *удаленностью многогранников фазы и амплитуды* взятую с минусом величину, обратную к коэффициенту вложения первого многогранника во второй.

З а д а ч а. Докажите, что удаленность многогранников фазы и амплитуды равна удаленности многогранника Ньютона фазы, если ряд Тейлора амплитуды имеет ненулевой свободный член.

П р и м е р. Пусть ряды Тейлора фазы и амплитуды равны соответственно $x_1^6 + x_1^3 x_2^2 + x_2^6$ и $x_1 x_2$. Тогда удаленность их многогранников равна $-7/9$.

Т е о р е м а 4. Предположим, что фаза осциллирующего интеграла является аналитической функцией в окрестности начала координат. Предположим, что ряд Тейлора фазы в начале координат имеет $\mathbb{R}$ -невыврожденную главную часть. Тогда

1. Показатель степени параметра старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла не больше удаленности многогранников фазы и амплитуды.

2. Показатель степени параметра старшего члена равен удаленности многогранников фазы и амплитуды, если эта удаленность больше -1 и многогранник, поставленный в соответствие амплитуде, конгруэнтен положительному октанту.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, только вместо ссылок на теорему 7.5 нужно ссылаться непосредственно на теорему 7.3. Отметим, что п. 2 теоремы является аналогом п. 3, а) теоремы 3. Справедливы аналоги пп. 3, б), 3, в), 4, 5.

В заключение разберем случай вырожденной главной части ряда Тейлора.

Т е о р е м а 5 (см. [18]). Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности начала координат. Предположим, что многогранник Ньютона ряда Тейлора фазы в начале координат далекий. Тогда показатель осцилляции фазы в начале координат не меньше удаленности этого многогранника.

С л е д с т в и е 1. Вес разрешения особенностей фазы больше -1 .

См. теорему 7.5.

С л е д с т в и е 2. Для фазы выполнены утверждения п. 3 теоремы 7.5.

С л е д с т в и е 3. Пусть фаза — функция двух переменных, имеющая вырожденную критическую точку в начале координат. Тогда показатель осцилляции этой критической точки равен весу ее разрешения особенностей.

Действительно, в этом случае легко подобрать систему координат, в которой удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы больше -1 .

С л е д с т в и е 4. *Удаленность критической точки не больше показателя осцилляции, если удаленность больше -1 (см. определение в п. 6.2.Г).*

Отметим, что теорема 6.5 утверждает равенство удаленности и показателя осцилляции для всех критических точек фаз двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Рассмотрим многообразие X , подчиненное многограннику Ньютона, и ассоциированную с ним проекцию $\pi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$. С помощью проекции поднимем фазу на многообразие и разрешим все особенности поднятой фазы на прообразе начала координат. А именно, по теореме Хиронаки [106] существуют новое многообразие Y и отображение $\varphi: Y \rightarrow X$, обладающие свойством: отображение $\pi \circ \varphi$ разрешает особенности фазы в начале координат. У фазы, поднятой на X , есть компонента гиперповерхности нулевого уровня с весом, равным удаленности многогранника Ньютона (см. доказательство теоремы 8.3). Прообраз этой компоненты на Y имеет тот же вес. Теперь теорема следует из п. 3 теоремы 7.5.

Б. Обобщение теоремы 3 на интегралы Лапласа. Теорема 6. Рассмотрим интеграл Лапласа

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Предположим, что фаза является аналитической функцией в окрестности начала координат и имеет в начале координат локальный минимум. Согласно теореме 7.6 при $\tau \rightarrow +\infty$ интеграл Лапласа разлагается в асимптотический ряд

$$e^{-\tau f(0)} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\alpha} a_{k,\alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k.$$

Предположим, что ряд Тейлора фазы в начале координат имеет $\mathbb{R}$ -невыврожденную главную часть. Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора фазы. Рассмотрим простой веер, подчиненный этому многограннику Ньютона. Тогда асимптотики интеграла Лапласа обладают свойствами асимптотик осциллирующего интеграла с той же фазой, указанными в теореме 3 в пп. 1, 3, 4, 5.

Доказательство теоремы 6 получается из доказательства теоремы 3 заменой ссылок на теорему 7.5 ссылками на теорему 7.6.

С л е д с т в и е т е о р е м ы (ср. со следствием теоремы 7.6). *Для каждого положительного t обозначим через $V(t)$ объем множества тех точек, в которых значение фазы меньше t . Согласно теореме 7.6 функция V при $t \rightarrow +0$ разлагается в асимптотический ряд $\sum_{\alpha} \sum_k a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k$. Утверждается, что порядок α мак-*

симального члена этого ряда равен взятой с минусом удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в точке минимума (при условии $\mathbb{R}$ -невыврожденности главной части ряда Тейлора).

З а м е ч а н и е. Утверждение о том, что показатель старшего члена асимптотического ряда интеграла Лапласа равен удаленности многогранника Ньютона фаз, доказано В. А. Васильевым в [29] для случая, когда главная часть ряда Тейлора фазы $\mathbb{R}$ -невыврождена и многогранник Ньютона пересекается с каждой координатной осью. Доказательство В. А. Васильева не использует разрешения особенностей.

В. П л о щ а д ь п о в е р х н о с т и у р о в н я ф у н к ц и и. Предположим, что в пространстве задана риманова метрика. Риманова метрика пространства задает риманову метрику на гиперповерхностях уровня функции. Риманова метрика на гиперповерхностях определяет форму $(n-1)$ -мерного объема. Вычислим объем компактных многообразий уровня функции и рассмотрим асимптотику объема при стремлении уровня к критическому.

Теорема 7. Предположим, что аналитическая функция f имеет изолированную точку минимума и минимальное значение функции равно нулю. Предположим, что в пространстве задана аналитическая риманова метрика. Для малых положительных t обозначим через $V(t)$ $(n-1)$ -мерный объем многообразия уровня t . Тогда при $t \rightarrow +0$ функция V разлагается в асимптотический

ряд
$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k,$$
 в котором параметр α пробегает конеч-

ное множество арифметических прогрессий, составленных из положительных рациональных чисел. Если дополнительно известно, что $\mathbb{R}$ -невыврождена главная часть ряда Тейлора функции f в точке минимума и $\mathbb{R}$ -невыврождена главная часть ряда Тейлора функции (df, df) в точке минимума функции f , то порядок α максимального члена асимптотического ряда зависит только от многогранников Ньютона предыдущих рядов Тейлора и вычисляется по следующему правилу.

П р а в и л о. Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора функции (df, df) в точке минимума функции f . Рассмотрим образ этого многогранника под действием гомотетии с коэффициентом $1/2$ и центром в начале координат. Полученный многогранник сдвинем на вектор $(1, \dots, 1)$. Рассмотрим второй многогранник, являющийся многогранником Ньютона ряда Тейлора функции f в точке минимума. Обозначим через k коэффициент вложения первого многогранника во второй. Тогда порядок α максимального члена асимптотического ряда равен $1/k-1$.

Доказательство теоремы основано на том, что число $-1/k$ является показателем максимального члена асимптотического ряда

интеграла Лапласа

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau f(x)} \sqrt{df, df} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n$$

при $\tau \rightarrow +\infty$, если амплитуда φ тождественно равна 1 в малой окрестности точки минимума, и носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности точки минимума.

Г. **Осциллирующие интегралы по полупространству.** Рассмотрим осциллирующий интеграл по полупространству

$$\int_{x_1 \geq 0} e^{i\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n,$$

где фаза и амплитуда — гладкие функции во всем пространстве. Предположим, что фаза — аналитическая функция в окрестности начала координат. Если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат и ограничение фазы на границу полупространства не имеет критической точки в начале координат, то при $\tau \rightarrow +\infty$ интеграл убывает быстрее любой степени параметра (теорема 6.1). Предположим, что ограничение фазы на границу имеет критическую точку в начале координат.

Т е о р е м а 8. *Осциллирующий интеграл по полупространству разлагается в асимптотический ряд*

$$e^{i\tau f(0)} \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi) \tau^{\alpha} (\ln t)^k \text{ при } \tau \rightarrow +\infty,$$

если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат. Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. Числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды. Носитель каждой обобщенной функции лежит в объединении критических множеств фазы и ограничения фазы на границу.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 7.5. Для доказательства нужно рассмотреть разрешение особенностей в начале координат функции $x_1 f$ (оно одновременно является разрешением особенностей функции f), а затем повторить рассуждения доказательства теоремы 7.5. В результате для осциллирующего интеграла по полупространству мы докажем утверждения пп. 1—5 теоремы 7.5 (единственного добавления требует п.5: он справедлив, если фаза не делится на x_1).

Если начало координат является критической точкой ограничения фазы на границу, но не является критической точкой фазы, исследование асимптотик интеграла по полупространству сводится к исследованию осциллирующего интеграла по границе. Действи-

тельно, диффеоморфизмом, сохраняющим границу, фазу можно привести в виду $x_1 + h(x_2, \dots, x_n)$. Теперь нужно интегрировать по частям по переменной x_1 .

Предположим, что фаза имеет критическую точку в начале координат. Предположим, что главная часть ряда Тейлора фазы в начале координат $\mathbb{R}$ -невыврождена.

Теорема 9. *В сделанных предположениях асимптотики осциллирующего интеграла по полупространству обладают свойствами, указанными в пп. 1—5 теоремы 3.*

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 3.

Рассмотрим еще один тип осциллирующих интегралов по полупространству, а именно, интегралы вида

$$\int_{x_1 > 0} e^{itf(x)} \varphi(x) x_1^{-1/2} dx_1 \dots dx_n.$$

Здесь, как и ранее, фаза и амплитуда φ — гладкие функции во всем пространстве. Исследование таких интегралов сводится к исследованию рассмотренных ранее интегралов по полупространству с помощью замены $x_1 = z^2$. Сформулируем одно из полученных таким образом утверждений.

Теорема 10. *Предположим, что фаза является аналитической функцией в окрестности начала координат. Предположим, что главная часть ряда Тейлора фазы в начале координат $\mathbb{R}$ -невыврождена. Тогда показатель осцилляции фазы в начале координат для интегралов указанного типа определяется многогранником Ньютона ряда Тейлора фазы и равен взятой с минусом величине, обратной значению параметра точки пересечений прямой $2x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = t$, где $t \in \mathbb{R}$, и границы многогранника Ньютона, если значение больше 1.*

Все заключения об асимптотиках осциллирующих интегралов по полупространству, сформулированные в этом пункте, справедливы для асимптотик интегралов Лапласа по полупространству.

8.4. Случай двух переменных. Согласно теореме 3 показатель осцилляции критической точки фазы равен удаленности многогранника Ньютона ее ряда Тейлора в некоторой системе координат, если в этой системе координат главная часть ряда Тейлора $\mathbb{R}$ -невыврождена и многогранник Ньютона далекий. Эта теорема применима к произвольной критической точке фазы, зависящей от одного аргумента. Если фаза зависит от двух и более аргументов, то указанная система координат существует не всегда (см. п. 6.2.Г). Все же случай фазы, зависящий от двух аргументов, удастся разобрать до конца и доказать равенство показателя осцилляции и удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в правильно выбранной системе координат. Правильно выбранная система координат называется *приспособленной к фазе*; она определена в п. 6.2.Г.

Т е о р е м а 11 (см. [18]). *Рассмотрим двойной осциллирующий интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{itf(x)} \varphi(x) dx_1 dx_2.$$

Предположим, что фаза — аналитическая функция в окрестности своей вырожденной критической точки. Тогда

1. *Показатель осцилляции критической точки равен ее удаленности.*

2. *Существует система локальных координат, приспособленная к критической точке.*

3. *Кратность показателя осцилляции критической точки равна 1, если найдется приспособленная к критической точке система координат, в которой центр границы многоугольника Ньютона ряда Тейлора критической точки лежит на пересечении двух ребер многоугольника. В противном случае кратность показателя осцилляции равна 0.*

З а м е ч а н и я. 1. Утверждения пп. 1, 2 справедливы и для невырожденной критической точки; утверждение п. 3 — нет (пример: $f=x_1x_2$).

2. Утверждения об асимптотиках, сформулированные в теореме, справедливы и для асимптотик интегралов Лапласа с фазами, зависящими от двух аргументов.

3. Теорема 11 влечет теорему 6.5 и ее дополнение а). Дополнение б) вытекает из следствия 3 теоремы 5 и п. 3 теоремы 7.5.

4. В [18] указан алгоритм поиска приспособленных систем координат, указаны признаки приспособленных координат. Согласно одному из них система координат приспособлена к критической точке, если центр границы многоугольника Ньютона ряда Тейлора критической точки лежит на пересечении двух ребер многоугольника, ср. с п. 3 теоремы.

5. Показатель осцилляции вырожденной критической точки фазы двух аргументов не меньше удаленности критической точки согласно следствию 4 теоремы 5.

Доказательство (как и доказательство теоремы 3) основано на анализе разрешения особенностей критической точки фазы. Анализ разрешения особенностей фазы в случае двух аргументов облегчается двумя обстоятельствами. Во-первых, в этом случае имеется простой алгоритм разрешения особенностей последовательными σ -процессами в точках. Во-вторых, в двумерном случае вес разрешения особенностей произвольной вырожденной критической точки больше —1 (следствие 3 теоремы 5). Согласно второму замечанию показатель осцилляции равен весу разрешения особенностей (п. 3 теоремы 7.5). Таким образом, остается доказать, что вес разрешения особенностей равен удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в приспособленной к фазе системе координат.

Теорема 11 является прямым следствием формулируемой ниже теоремы 12.

Т е о р е м а 12 (см. [18]). *Рассмотрим разрешение особенностей вырожденной критической точки аналитической функции двух аргументов. Тогда*

1. *Вес разрешения особенностей равен удаленности критической точки.*

2. *Существует система локальных аналитических координат, в которых удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора критической точки равна весу разрешения особенностей.*

3. *Кратность числа, равного весу, относительно разрешения особенностей (определение см. в п. 7.3) равна 2, если существует приспособленная к критической точке система координат, в которой центр границы многоугольника Ньютона лежит на пересечении двух ребер многоугольника. В противном случае кратность равна 1.*

§ 9. Показатели особости, примеры

В этом параграфе мы докажем аддитивность показателя осцилляции, объясним вычисления показателей особости в таблицах п. 6.1.И. Во второй части параграфа мы приведем пример деформации критической точки. Этот пример иллюстрирует несколько явлений. Во-первых, отсутствие полунепрерывности сверху показателя осцилляции. Во-вторых, существование критических точек, которые комплексно-эквивалентны, но имеют разные показатели особости. В-третьих, существование критической точки, у которой показатель особости не равен удаленности. Наконец, существование критической точки, у которой главная часть ряда Тейлора $\mathbb{R}$ -невырождена, но удаленность многогранника Ньютона больше показателя осцилляции.

9.1. Показатель особости.

А. Аддитивность показателя осцилляции и его кратности. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, x, y — соответственно их критические точки. Критическая точка $x \times y$ — функции $f + g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ называется *прямой суммой* критических точек x, y .

Лемма 1. *Показатель осцилляции и кратность показателя осцилляции аддитивны.*

Доказательство. Обозначим через β, K соответственно показатель осцилляции и кратность показателя осцилляции.

Очевидно, что $\beta(x \times y) \geq \beta(x) + \beta(y)$, и если $\beta(x \times y) = \beta(x) + \beta(y)$, то $K(x \times y) \geq K(x) + K(y)$. Действительно, если амплитуда осциллирующего интеграла с фазой $f + g$ разлагается в произведение двух функций, одна из которых есть функция на $\mathbb{R}^n$, а другая есть функция на $\mathbb{R}^l$, то сам интеграл разлагается в произведение осциллирующих интегралов с фазами соответственно f и g .

Докажем обратные неравенства. Рассмотрим осциллирующий интеграл с фазой $f+g$. Предположим, что носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности точки $x \times y$. В этом случае интеграл

разлагается в асимптотический ряд $\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n+l-1} a_{k,\alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k$,

где числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды. Обобщенная функция $a_{k,\alpha}$ при $\alpha > \beta(x) + \beta(y)$ тождественно равна нулю, поскольку в пространстве амплитуд всюду плотное множество образуют линейные комбинации амплитуд, разлагающихся в произведение функции на $\mathbb{R}^n$ и функции на $\mathbb{R}^l$. Таким образом, $\beta(x \times y) = \beta(x) + \beta(y)$. Аналогично доказывается равенство $K(x \times y) = K(x) + K(y)$.

С л е д с т в и е. Показатель особенности и его кратность равны у стабильно эквивалентных критических точек.

Б. Вычисления показателей особенности в таблицах п. 6.1.И. Показатели особенности и их кратности для критических точек таблиц вычисляются с помощью теорем 8.3 и 8.11. Теоремы 8.3 и 8.11 применимы к критическим точкам, классифицированным в главе 2 ОДО-1, поскольку каждая из указанных там критических точек либо имеет $\mathbb{R}$ -невырожденную главную часть ряда Тейлора, либо, если это функция двух переменных, записана в приспособленной системе координат. Сформулированное утверждение несложно проверяется в каждом отдельном случае. После этого вычисление сводится к вычислению удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора.

9.2. Примеры.

Пример 1. Положим $F(x_1, x_2, x_3, y) = (yx_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p$, где y — вещественный параметр, $p \geq 9$. Обозначим через β_y показатель осцилляции критической точки в начале координат в $\mathbb{R}^3$ функции $F(\cdot, y)$.

Теорема 1 (см. [18]). Семейство F функций на $\mathbb{R}^3$, зависящих от параметра y , обладает следующими свойствами.

1. Функция $F(\cdot, y)$ при всех значениях параметра y имеет конечнократную критическую точку в начале координат.

2. $\beta_0 = -5/8$.

3. При $y > 0$ $\beta_y = -3/4$.

4. При $y < 0$ $\beta_y > -(1/2 + \gamma(p))$, где функция $\gamma(p)$ стремится к нулю при $p \rightarrow +\infty$.

5. Удаленность критической точки в начале координат функции $F(\cdot, y)$ при $y \neq 0$ равна $-3/4$.

6. Существует окрестность U начала координат в $\mathbb{R}^3$ и окрестность V начала координат в $\mathbb{R}$ такие, что показатель осцилляции функции $F(\cdot, y)$, $y \in V$, в любой ее критической точке $x \in U \setminus 0$ не меньше -1 .

С л е д с т в и е 1. Для критической точки в начале координат функции $F(\cdot, 0)$ при достаточно большом p равномерный показа-

тель осцилляции больше индивидуального показателя осцилляции.

Из доказательства теоремы 1 следует, что такое явление наблюдается уже при $p=9$.

С л е д с т в и е 2. Критические точки в началах координат функций $F(\cdot, y)$ и $F(\cdot, -y)$ при $p=4l$ комплексно-эквивалентны (т. е. переводятся одна в другую голоморфным диффеоморфизмом пространства $\mathbb{C}^3$), однако имеют разные показатели осцилляции.

С л е д с т в и е 3. Удаленность критической точки в начале координат функции $F(\cdot, y)$ при $y < 0$ меньше показателя осцилляции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1 проверяется прямым вычислением. Утверждения 2, 3 следуют из теоремы 8.3 в силу $\mathbb{R}$ -невырожденности главной части многочлена $F(\cdot, y)$ при указанных y . Утверждение 5 следует из того, что удаленность критической точки в начале координат функции $\pm x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ равна $-3/2$.

Для доказательства утверждения 6 достаточно заметить, что при малых y у близких к нулю критических точек x координаты x_2, x_3 равны нулю. Это, как легко видеть, влечет $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x, y) \neq 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}(x, y) \neq 0$, т. е. ранг второго дифференциала не меньше двух. Согласно обобщенной лемме Морса в окрестности такой критической точки функция приводится к виду $\varphi(u_1) \pm u_2^2 \pm u_3^2$. Для этой функции утверждение 6 следует из теоремы 8.3.

Доказательство п. 4 основано на теореме 7.5. Строится разрешение особенностей критической точки в начале координат, и показывается, что вес этого разрешения больше, чем $-(1/2 + \gamma(p))$, где $\gamma(p)$ стремится к нулю при $p \rightarrow +\infty$. При построении разрешения сначала делается σ -процесс в начале координат, а затем $p/2$ раз делается σ -процесс с центром в кривой, являющейся пересечением прообраза начала координат и собственного прообраза поверхности нулевого уровня функции F . Возникшая последней компонента имеет достаточно высокий вес, что и доказывает п. 4; подробнее см. в [18].

Пример 2. Пусть $f_+ = x_4^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)) \cdot x_5$, $f_- = x_4^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (-x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)) \cdot x_5$.

Т е о р е м а 2. При достаточно большом p многочлены $f_{\pm}$ обладают следующими свойствами.

1. Их главные части $\mathbb{R}$ -невырождены.
2. Их многогранники Ньютона совпадают.
3. Показатель осцилляции в начале координат многочлена f_+ равен $-7/4$.
4. Показатель осцилляции в начале координат многочлена f_- не меньше чем $-(1/2 + 1 + \gamma(p))$, где $\gamma(p)$ стремится к нулю при $p \rightarrow +\infty$.
5. Удаленность многогранника Ньютона многочленов меньше -1 .

С л е д с т в и е 1. Существует разрешение особенностей критической точки в начале координат многочлена f_+ , вес которого больше показателя осцилляции.

Действительно, таким разрешением особенностей является разрешение, указанное в теореме 8.2 (см. также теорему 8.3).

С л е д с т в и е 2. Удаленность многогранника Ньютона критической точки в начале координат многочлена f_+ больше показателя осцилляции.

Доказательство. П. 2 очевиден. Пп. 1, 5 проверяются непосредственным вычислением. Докажем п. 3 (п. 4 доказывается аналогично). Сделаем замену $v = x_5 + x_4 + x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2$, тогда $f_+ = (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))v$. Сделаем замену $u = x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)$, а затем $v = s + t$, $u = s - t$, тогда $f = F(x_1, x_2, x_3, 1) + s^2 - t^2$, где F — функция из примера 1. Теперь п. 3 следует из теоремы 1 и леммы 1.

**ИНТЕГРАЛЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФОРМ
ПО ИСЧЕЗАЮЩИМ ЦИКЛАМ**

Первая глава книги посвящена топологии критической точки голоморфной функции, третья глава посвящена ее анализу. Основным объектом исследования — интеграл голоморфной формы, определенной в окрестности критической точки, по циклу, лежащему в многообразии уровня функции и исчезающему в критической точке. Мы изучаем изменение интеграла при непрерывной деформации цикла из одного многообразия уровня в другое. Мы показываем, что асимптотическое поведение таких интегралов при деформации циклов в критическую точку содержит информацию о самых разнообразных объектах, связанных с критической точкой.

В § 10 изложены простейшие свойства интегралов (голоморфная зависимость от параметров, разложения в ряды, связь с группой монодромии). В § 11 описано взаимодействие асимптотик интегралов по циклам с асимптотиками интегралов метода перевала, для которых голоморфная функция служит фазой (в частности, с асимптотиками осциллирующих интегралов). В § 12 обсуждаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции, заданные интегралами голоморфной формы по циклам, непрерывно зависящим от параметров. § 13 посвящен обсуждению свойств коэффициентов асимптотических разложений интегралов голоморфных форм по циклам, непрерывно зависящим от параметров. В § 13 определена смешанная структура Ходжа конечнократной критической точки голоморфной функции. В § 14 обсуждаются взаимодействия смешанной структуры Ходжа критической точки с другими характеристиками критической точки. В § 15 с помощью интегралов построены отображения базы версальной деформации критической точки в исчезающие в точке когомологии. Эти отображения переносят структуры, имеющиеся в когомологиях, на базу версальной деформации.

§ 10. Простейшие свойства интегралов

В параграфе доказывается голоморфная зависимость интеграла от параметров; объясняется связь ветвления интеграла с группой монодромии гомологий; доказывается разложимость интеграла в ряд в окрестности выделенного значения параметра.

Отметим важность определенных в пп. 10.3.А, 10.3.Г понятий специализации развертки деформации ростка голоморфной функции и расслоения Милнора деформации ростка голоморфной функции.

10.1. Пример. Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ линии уровня многочлена. Если значение уровня не критическое, то линия уровня является неособой римановой поверхностью. Можно представлять себе линии уровня многочлена $f(x, y) = y^2 + x^3$, все они, за исключением линии нулевого уровня, являются поверхностями рода 1, из которых выколота одна бесконечно удаленная точка. Предположим, что на $\mathbb{C}^2$ задана полиномиальная дифференциальная 1-форма, например, форма $\omega = y dx$. Наконец, предположим, что на одной из неособых линий уровня выделена замкнутая кривая. Рассмотрим интеграл формы по кривой. Будем изучать изменение интеграла при непрерывной деформации кривой из одной неособой линии уровня в другую. В выбранном нами случае интеграл называется эллиптическим, и таким образом мы собираемся изучать зависимость от параметра периода эллиптического интеграла.

Мы докажем, что вне конечного множества исключительных значений параметра интеграл является многозначной голоморфной функцией параметра. Мы объясним связь ветвления значений интеграла с топологией расслоения, которое задает многочлен, ограниченный на дополнение к объединению линий исключительных уровней. Мы докажем, что в окрестности произвольного значения параметра интеграл разлагается в ряд по дробным степеням параметра и целым степеням логарифма параметра, при этом степени параметра и степени логарифмов параметра определяются жордановой структурой оператора монодромии в одномерных гомологиях линии уровня, отвечающего обходу вокруг исключительного значения параметра.

А. Голоморфная зависимость от параметра. Начнем с важного замечания: форма, ограниченная на линию уровня, замкнута. Действительно, на комплексной кривой нет отличных от нуля голоморфных 2-форм. Это замечание имеет два следствия. Во-первых, интеграл не меняется при замене кривой интегрирования на гомологичную кривую (теорема Стокса). Во-вторых, интеграл формы по кривой, продеформированной в соседнюю неособую линию уровня, определен корректно. Действительно, две разные непрерывные деформации в соседнюю линию уровня приводят к гомологичным кривым. Таким образом, интеграл формы по кривой, продеформированной в линии уровня, близкие к выделенной, определяет функцию, относящую интеграл значению многочлена на линии.

Т е о р е м а 1. *Интеграл — аналитическая функция значения многочлена.*

У нас есть функция в окрестности выделенной точки комплексной прямой, докажем ее голоморфность. Сначала докажем, что эта функция гладкая.

В окрестности исходной кривой интегрирования многочлен не имеет критических точек, поэтому в окрестности исходной кривой интегрирования отображение $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$ является гладким ло-

кально тривиальным расслоением. Выберем его гладкую тривиализацию и с помощью тривиализации разнесем исходную кривую интегрирования в соседние линии уровня многочлена. Рассмотрим интеграл формы по одной кривой построенного семейства. Он равен интегралу по исходной кривой интегрирования формы, перенесенной с помощью диффеоморфизма тривиализации на исходную линию уровня. Таким образом, на исходной линии уровня есть кривая и дифференциальная 1-форма, гладко зависящая от комплексного параметра. По стандартной теореме анализа интеграл формы по кривой гладко зависит от параметра.

Кривую на линии уровня s , построенную с помощью тривиализации, обозначим через $\sigma(s)$.

Для завершения доказательства представим наш интеграл в виде интеграла мероморфной 2-формы по вещественной поверхности. В качестве 2-формы возьмем форму $df \wedge \omega / (f - t)$, где t — значение многочлена на исходной линии уровня. Опишем поверхность. На комплексной прямой рассмотрим малый путь γ , обходящий против часовой стрелки число t . Обозначим через Γ поверхность в $\mathbb{C}^2$, образованную объединением кривых, параметры которых принадлежат пути: $\Gamma = \bigcup_{s \in \gamma} \sigma(s)$.

Лемма 1. Интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{df \wedge \omega}{f - t}$ не зависит от выбора пути γ и равен $\int_{\sigma(t)} \omega$.

Теорема следует из леммы, поскольку интегральное представление леммы голоморфно зависит от t .

Доказательство леммы. Независимость от пути следует из теоремы Стокса в силу замкнутости 2-формы. Докажем равенство интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{df \wedge \omega}{f - t} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\gamma(s)} \omega \right) \frac{ds}{s - t} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\sigma(t)} \omega \right) \frac{ds}{s - t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\sigma(s)} \omega - \int_{\sigma(t)} \omega \right) \frac{ds}{s - t}. \end{aligned}$$

Первый интеграл правой части равен нашему интегралу. Подынтегральное выражение второго интеграла гладко зависит от s . Поэтому второй интеграл стремится к нулю, если в качестве пути брать окружность стремящегося к нулю радиуса. Таким образом, второй интеграл равен нулю. Лемма доказана.

Б. В е т в л е н и е и н т е г р а л а. Выясним глобальные свойства функции, заданной интегралом полиномиальной дифференциальной 1-формы по замкнутой кривой, лежащей на линии уровня многочлена.

Согласно стандартным теоремам (см. [17, 232]) из $\mathbb{C}^2$ можно удалить конечное множество линий уровня многочлена так, что ограничение многочлена на их дополнение является локально тривиальным расслоением. Обозначим эти значения уровня через $t_1, \dots, t_N$. В выбранном нами примере достаточно выбросить линию нулевого уровня.

Вернемся к интегралу $\int \omega$. Интеграл корректно продолжается вдоль любого пути на $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$, начинающегося в точке t . Для этого нужно непрерывно деформировать кривую $\sigma(t)$ в линии уровня над точками пути; класс одномерных гомологий кривой, лежащей на линии уровня, соответствующей последней точки пути, определяется путем и не зависит от способа деформации. Если два пути с одинаковыми концами гомотопны в $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$, то значения продолжений интеграла в конечной точке совпадают. Таким образом, интеграл — многозначная голоморфная функция на $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$.

Ветвление интеграла определяется преобразованием монодромии в одномерных гомологиях линии уровня t . Каждому классу гомотопных замкнутых путей в $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$ с началом в точке t соответствует линейный автоморфизм монодромии одномерных гомологий линии уровня t ; он определяется непрерывной деформацией циклов в линии уровня над точками пути (см. главу 1). Если M_γ — автоморфизм монодромии, отвечающий пути γ , то продолжение интеграла вдоль пути γ по определению равно $\int_{M_\gamma \sigma(t)} \omega$, где

$\sigma(t)$ — класс гомологий, определяемый кривой $\sigma(t)$.

Для выбранного нами примера ограничение многочлена на дополнение к линии нулевого уровня — гладкое локально тривиальное расслоение. Таким образом, рассматриваемый эллиптический интеграл $\int y dx$ — многозначная голоморфная функция на $\mathbb{C}^1 \setminus 0$. Все замкнутые пути в $\mathbb{C}^1 \setminus 0$ кратны одному, обходящему начало координат один раз против часовой стрелки. Поэтому для выяснения ветвления рассматриваемого интеграла нужно выяснить, как устроено линейное преобразование монодромии, отвечающее указанному пути. В нашем примере неособая линия уровня — это тор без точки. Его группа одномерных гомологий — двумерное векторное пространство.

Представим себе линию уровня t , т. е. кривую $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | y^2 + x^3 = t\}$, как двулистное накрытие над осью x -ов с ветвлением в кубических корнях из t . Проекции на ось x -ов циклов, задающих базис (a, b) одномерных гомологий, изображены на рис. 72, а. Диффеоморфизм монодромии, отвечающий обходу числа t вокруг нуля, можно задать формулами

$$(x, y) \mapsto (\exp(2\pi i/3) x, \exp(2\pi i/2) y).$$

Образ циклов изображен на рис. 72, б. Поэтому монодромия задается формулами $M: (a, b) \mapsto (a-b, a)$. Теперь для описания ветвления интеграла голоморфной формы по циклам семейства, порожденного циклом $\sigma(t)$, достаточно знать разложение класса гомологий, заданного циклом $\sigma(t)$, по базису и знать интегралы формы по базисным классам.

З а м е ч а н и е. Для такой простой формы, как $y dx$, ветвление можно описать, не зная преобразования монодромии в гомологиях.

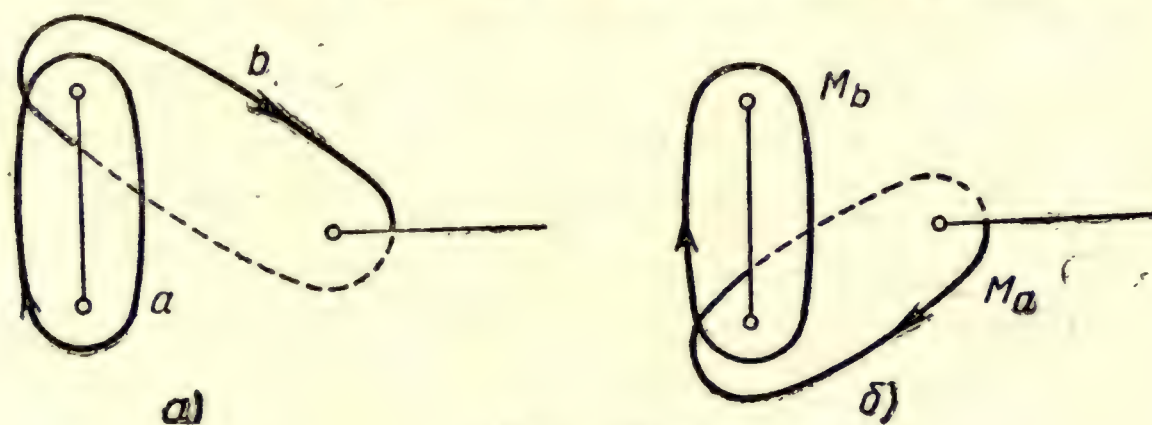


Рис. 72.

Отображение $(x, y) \mapsto (t^{1/3}x, t^{1/2}y)$ задает диффеоморфизм линии уровня 1 на линию уровня t . Ограничение формы $y dx$ на линию уровня t , перенесенное с помощью этого диффеоморфизма на линию уровня 1, после умножения на $t^{-5/6}$ равно ограничению формы $y dx$ на линию уровня 1. Поэтому функция, заданная интегралом формы $y dx$ по циклам семейства, равна $\text{const} \cdot t^{5/6}$, где const — это интеграл формы по циклу семейства, лежащему на линии уровня 1.

В. Р а з л о ж е н и е и н т е г р а л а в р я д. Мы выяснили, что интеграл полиномиальной формы по циклу, зависящему от параметра, является многозначной голоморфной функцией на $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$. Поэтому каждая ветвь этой функции в окрестности произвольного значения параметра, не являющегося исключительным, разлагается в ряд Тейлора. Мы докажем, что и в окрестности исключительного значения параметра интеграл разлагается в ряд. Однако теперь это — ряд по дробным степеням параметра, коэффициентами которого являются многочлены от логарифма параметра. Такой ряд сходится в каждом секторе малой окрестности исключительного значения параметра (сходимость ряда рассматривается в секторах, а не в полной окрестности, из-за присутствия логарифмов). В описании ряда важную роль играет преобразование монодромии, отвечающее обходу вокруг исключительного значения параметра. Так, показатели степеней параметра являются деленными на $2\pi i$ логарифмами собственных чисел преобразования монодромии, а степень любого многочлена от логарифма, являющегося коэффициентом ряда, всегда меньше, чем максимум размеров жордановых блоков с соответствующим собственным числом.

Сформулируем теорему. Для простоты обозначений предположим, что исключительное значение параметра равно нулю. Выделим в малой окрестности нуля сектор $a \leq \arg t \leq b$ и для каждого от-

личного от нуля числа t из сектора выделим базис $\sigma_1(t), \dots, \sigma_\mu(t)$ целочисленных одномерных гомологий линии уровня t , непрерывно зависящий от t . Обозначим через M преобразование монодромии, отвечающее обходу параметра вокруг нуля против часовой стрелки.

Теорема 2 (см. [14, 146, 154, 166, 185, 187]). В указанном секторе вектор-функция $I(t) = \left(\int_{\sigma_1(t)} \omega, \dots, \int_{\sigma_\mu(t)} \omega \right)$ разлагается

в ряд $\sum_{\alpha, k} a_{k, \alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Ряд сходится, если модуль параметра

достаточно мал. Коэффициенты ряда — векторы пространства $\mathbb{C}^\mu$. вещественные части всех чисел α больше некоторой константы. Каждое число α обладает свойством: $\exp(2\pi i \alpha)$ — собственное число оператора M . Коэффициент $a_{k, \alpha}$ этого ряда равен нулю, если у жордановой формы оператора M нет блоков размеров $k+1$ и более с собственным числом $\exp(2\pi i \alpha)$.

З а м е ч а н и е. Согласно теоремам 3.11, 3.12 собственные числа оператора монодромии M являются корнями из 1 и размеры его жордановых клеток не превосходят двух. Поэтому в предыдущем ряде все числа α рациональны и степени логарифмов не больше 1.

Пример. Пусть $y^2 + x^3$ — многочлен, на линиях уровня которого лежат циклы, $\omega = y dx$. Тогда в окрестности нуля $\int_{\sigma(t)} \omega =$

$= \text{const} \cdot t^{5/6}$ (см. замечание в п. Б). В п. Б мы описали преобразование монодромии, отвечающее обходу вокруг нуля, для этого случая. Его собственные числа различны и равны $\exp(\pm \pi i/3)$.

Поэтому согласно теореме для любой полиномиальной формы ω ее интеграл в окрестности нуля разлагается в ряд $\int_{\sigma(t)} \omega =$

$= \sum_l a_l t^{5/6+l} + \sum_l b_l t^{7/6+l}$, где l — целые числа, среди которых только конечное множество отрицательных. На самом деле, как мы увидим в п. Г, все показатели членов ряда положительны.

Доказательство теоремы о разложении в ряд основано на следующей теореме о том, что интеграл полиномиальной формы в каждом секторе окрестности исключительного значения параметра растет не быстрее подходящей степени параметра.

Теорема 3 (см. [185, 187, 188]). Существует натуральное N , для которого в указанном выше секторе имеют место неравенства

$$\left| \int_{\sigma_j(t)} \omega \right| \leq \text{const} \cdot |t|^{-N}, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Мы не будем доказывать эту теорему, укажем лишь один из способов ее доказательства. Разрешим особенности линии исключительного уровня. Тогда в подходящих координатах в окрестности произвольной точки разрешенной линии уровня многочлен становится одночленом, полиномиальная форма превращается в

голоморфную, и интеграл по части цикла, лежащей в окрестности, удастся оценить требуемым образом. Отметим, что нужно разрешать особенности и бесконечно удаленных точек линии исключительного уровня, чтобы оценить интеграл по части цикла, удаляющейся в бесконечность. В окрестности разрешения таких точек форма превращается в мероморфную, но и для мероморфной формы требуемую оценку нетрудно получить (см. [30, 22]). Элементарное доказательство, не использующее разрешения особенностей, см. в [187, 188].

Для вывода теоремы 2 из теоремы 3 нам нужно уметь логарифмировать невырожденное линейное преобразование.

Лемма 2. Пусть A — невырожденная $\mu \times \mu$ -матрица. Тогда существует $\mu \times \mu$ -матрица B , для которой $\exp B = A$ ($\exp B = \sum B^n/n!$).

Прежде чем доказывать лемму, напомним определения. Линейный оператор называется *полупростым*, если пространство, в котором он действует, имеет базис, состоящий из собственных векторов оператора. Линейный оператор называется *унипотентным*, если все его собственные числа равны 1. Хорошо известно, что для любого невырожденного линейного оператора M существуют и единственны коммутирующие между собой полупростой оператор M_s и унипотентный оператор M_u , для которых $M = M_u M_s$ (оператор M_s — это оператор, который на корневом подпространстве оператора M действует как умножение на соответствующее собственное число; см. [90]). Операторы M_u , M_s называются соответственно *унипотентной* и *полупростой частями* оператора M .

Доказательство леммы 2. Лемму достаточно доказать для матрицы в жордановой форме и, более того, для матрицы, состоящей из одного блока. Пусть λ — собственное число блока. Тогда блочная матрица разлагается в произведение матрицы $\lambda \cdot \text{Id}$ и матрицы, у которой все собственные числа равны 1. Первая матрица — это полупростая часть, а вторая — унипотентная часть. Матрицы полупростой и унипотентной части коммутируют. Поэтому достаточно прологарифмировать каждую из них. Логарифм первой равен $\ln \lambda \text{Id}$. Логарифм второй задается формулой

$$\ln C = \ln (\text{Id} + (C - \text{Id})) = \sum (-1)^{s+1} (C - \text{Id})^s / s.$$

З а м е ч а н и е. Матрица $\ln C$ нильпотентна, т. е. все ее собственные числа равны нулю.

Доказательство теоремы 2. В малой окрестности нуля распространим по непрерывности базис целочисленных одномерных гомологий на параметры с произвольными аргументами. Интегрирование формы по базису распространяет вектор-функцию I до многозначной вектор-функции в малой проколотой окрестности нуля. При обходе параметра вокруг нуля «против часовой стрелки» вектор $I(t)$ переходит в вектор $I(t) \cdot A$, где A —

матрица преобразования монодромии M , записанного в базисе $\sigma_1(t), \dots, \sigma_\mu(t)$.

Рассмотрим в проколоте окрестности нуля многозначную голоморфную матричную функцию

$$J(t) = \exp(-\ln(t) \cdot \ln(A)/2\pi i),$$

где $\ln(A)$ — одно из возможных значений логарифма матрицы A . При обходе параметра вокруг нуля против часовой стрелки матрица $J(t)$ переходит в матрицу $A^{-1}J(t)$. Таким образом, вектор-функция $t \mapsto I(t)J(t)$ является однозначной функцией в проколоте окрестности нуля.

Докажем, что функция $I \cdot J$ мероморфна в нуле, т. е. докажем, что ее координаты растут не быстрее подходящей степени параметра при подходе параметра к нулю. Согласно теореме 3 достаточно доказать аналогичное утверждение о координатах матрицы J .

Выясним, как выглядят элементы матрицы J . Для этого достаточно выяснить, как выглядят элементы матрицы J для случаев, в которых матрица A диагональная или унипотентная (см. лемму 2). В первом случае матрица J тоже диагональная, на диагоналях стоят степени переменной t . Во втором случае элементами матрицы являются многочлены от $\ln t$, степени многочленов меньше размеров жордановых блоков (см. замечание после леммы 2). Таким образом, для произвольной матрицы A каждый элемент матрицы $J(t)$ имеет вид конечной суммы $\sum_{\alpha} t^{\alpha} P_{\alpha}(\ln t)$. В этой сумме каждое число α обладает свойством: $\exp(-2\pi i \alpha)$ — собственное число матрицы A . Для каждого α коэффициент P_{α} — многочлен от $\ln t$, его степень меньше максимума размеров жордановых блоков матрицы A с собственным числом $\exp(-2\pi i \alpha)$.

Это утверждение означает, что коэффициенты матрицы J растут достаточно медленно. Поэтому вектор-функция $I \cdot J$ мероморфна в нуле. Следовательно, она разлагается в ряд Лорана, в котором конечное множество отрицательных степеней. Теперь, умножая этот ряд на J^{-1} , получаем теорему 2.

В. Уточнение теорем 2, 3. Если при деформации цикла в линию исключительного уровня цикл остается в ограниченной части пространства, то интеграл по циклу полиномиальной формы остается в процессе деформации ограниченным. Более того, если цикл, продеформированный в линию исключительного уровня, гомологичен в ней нулю, то интеграл полиномиальной формы по циклу стремится в процессе деформации к нулю. Эти утверждения доказаны Б. Мальгранжем [185]. Приведем их точную формулировку. Будем, как и ранее, предполагать, что исключительное значение равно нулю.

Обозначим через X_t линию уровня t . Обозначим через $X_{t,R}$ множество точек линии уровня t , удаленных от начала координат на расстояние, не большее чем R . Для малых вещественных поло

жительных t рассмотрим семейство одномерных целочисленных классов гомологий $\sigma(t) \in H_1(X_t, \mathbb{Z})$, непрерывно зависящих от t . Скажем, что при $t \rightarrow 0$ это семейство является семейством гомологий, *ограниченных* шаром радиуса R , если для всех достаточно малых t класс $\sigma(t)$ лежит в образе естественного гомоморфизма $\gamma_R: H_1(X_{t,R}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_t, \mathbb{Z})$. Ясно, что если семейство ограничено шаром радиуса R , то оно ограничено и всяким шаром большего радиуса.

Скажем, что при $t \rightarrow 0$ семейство ограниченных гомологий является семейством *исчезающих* гомологий, если существуют $R > 0$, $\delta > 0$, обладающие свойствами:

- а) семейство ограничено шаром радиуса R ;
- б) для каждого $t \in (0, \delta)$ существует класс $\sigma(t) \in H_1(X_{t,R}, \mathbb{Z})$, который при гомоморфизме γ_R переходит в $\sigma(t)$ и который принадлежит ядру естественного гомоморфизма $H_1(X_{t,R}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$, где $X = \bigcup_{t \in [0, \delta)} X_{t,R}$.

Теорема 3' (см. [185]). *Если σ — семейство ограниченных гомологий, то при $t \rightarrow +0$ существует конечный предел интеграла $\int_{\sigma(t)} \omega$. Этот предел равен нулю, если семейство является семейством исчезающих гомологий.*

Следствие теорем 2, 3'. Пусть σ — семейство ограниченных гомологий. В малой окрестности нуля распространим его по непрерывности на параметры с произвольными аргументами. Получим многозначное семейство целочисленных классов гомологий, непрерывно зависящих от параметра. Согласно теореме 2 функция, задаваемая интегралом полиномиальной формы по классам семейства, в окрестности нуля разлагается в ряд $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Согласно теореме 3' в этом ряду все α неотрицательны и все коэффициенты $a_{k,0}$ при $k > 0$ равны нулю. Более того, если σ — семейство исчезающих гомологий, то все α положительны.

Пример. Пусть $y^2 + x^3$ — многочлен, на линиях уровня которого лежат циклы. В окрестности нуля всякое семейство одномерных целочисленных гомологий, непрерывно зависящих от параметра, является семейством исчезающих гомологий (см. замечание в п. Б). Поэтому в ряде примера на стр. 202 все показатели положительны.

В следующих пунктах этого параграфа мы обобщим полученные результаты в трех направлениях. Во-первых, увеличим размерность пространства. Во-вторых, разрешим многочлену голоморфно зависеть от дополнительных параметров. В-третьих, заменим многочлен голоморфной функцией.

10.2. Голоморфная зависимость от параметров. Рассмотрим голоморфную функцию, переменные которой разделены на две группы: $F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$. Эта функция задает семейство голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$, голоморфно зависящих от парамет-

ров $y = (y_1, \dots, y_k)$. Обозначим через $X_{(t, y)}$ гиперповерхность уровня t функции $F(\cdot, y)$:

$$X_{(t, y)} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid F(x, y) = t\}.$$

Предположим, что на гиперповерхности не критического уровня t_0 функции $F(\cdot, y_0)$ выделен $(n-1)$ -мерный цикл. Непрерывно деформируя этот цикл из одной гиперповерхности уровня в другую, мы получим непрерывное семейство циклов на гиперповерхностях уровней, близких к выделенному уровню, функций, параметры которых близки к выделенным. Цикл, лежащий на гиперповерхности $X_{(t, y)}$, обозначим через $\sigma(t, y)$.

А. Интегралы голоморфной $(n-1)$ -формы. Предположим, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задана голоморфная дифференциальная $(n-1)$ -форма, голоморфно зависящая от параметров y :

$$\omega = \sum_{i=1}^n h_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где $\{h_i\}$ — голоморфные функции. Рассмотрим интеграл $I(t, y) = \int_{\sigma(t, y)} \omega(y)$. Интеграл, как функция параметров t, y , определен

в окрестности точки (t_0, y_0) пространства $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$. Ограничение формы на гиперповерхность уровня замкнуто (поскольку на $(n-1)$ -мерном голоморфном многообразии нет отличных от нуля голоморфных n -форм). Следовательно, интеграл определяется классом цикла в группе $(n-1)$ -мерных гомологий гиперповерхности и не зависит от цикла, представляющего класс. Кроме того, интеграл формы по циклу, продеформированному в соседнюю гиперповерхность уровня, не зависит от деформации, поскольку разные деформации приводят к гомологическим циклам.

Т е о р е м а 4 (см. [14, 185]). *Интеграл голоморфно зависит от (t, y) .*

Доказательство теоремы фактически такое же, как доказательство теоремы 1. Для проведения доказательства нам понадобится понятие кограничного оператора Лере, которое мы уже неявно использовали при формулировке леммы 1.

Пусть M — голоморфное многообразие, N — его голоморфное подмногообразие коразмерности 1. Тогда для любого l имеется естественный гомоморфизм $H_l(N) \rightarrow H_{l+1}(M \setminus N)$, называемый *кограничным оператором Лере*. Он определяется следующим образом. Выберем трубчатую окрестность подмногообразия в многообразии. Рассмотрим проекцию на подмногообразии границы трубчатой окрестности. Проекция — локально тривиальное расслоение со слоем, являющимся окружностью. Рассмотрим класс гомологий на подмногообразии и представляющий его цикл. Рассмотрим прообраз цикла на границе трубчатой окрестности. Это — цикл, размерность которого на 1 больше, чем размерность исходного

цикла. По определению этот цикл, рассматриваемый как цикл в дополнении к подмногообразию, представляет образ исходного класса гомологий при кограничном операторе Лере. Легко видеть, что класс гомологий этого цикла в дополнении не зависит от выбора цикла, представляющего на подмногообразии исходный класс гомологий, и от выбора трубчатой окрестности.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Стандартная теорема анализа гласит: если заданы цепь и форма, зависящая голоморфно от параметров, то интеграл формы по цепи зависит от параметров голоморфно. Для применения этой теоремы нужно интегралы заданной формы по циклам семейства, лежащим в разных гиперповерхностях, представить как интеграл новой формы по одной и той же цепи. Роль новой формы играет исходная форма, умноженная на $dF(\cdot, y)/(F(\cdot, y) - t)$. Роль общей цепи играет цикл, представляющий одновременно образы всех классов гомологий циклов семейства относительно кограничных операторов Лере пар, состоящих из гиперповерхности уровня и $\mathbb{C}^n$ (ср. лемму 1).

Рассмотрим границу трубчатой окрестности гиперповерхности $X_{(t_0, y_0)}$ в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим на границе n -мерный цикл $\partial\sigma$, представляющий образ класса гомологий цикла $\partial\sigma(t_0, y_0)$ на гиперповерхности при кограничном операторе Лере. Этот же цикл представляет образ класса гомологий цикла $\sigma(t, y)$ на гиперповерхности $X_{(t, y)}$ при кограничном операторе Лере, если точка (t, y) достаточно близка к (t_0, y_0) .

Имеет место интегральное представление

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma(t, y)} dF(\cdot, y) \wedge \omega(y) / (F(\cdot, y) - t), \quad (1)$$

где через $\partial\sigma(t, y)$ обозначен образ класса гомологий цикла $\sigma(t, y)$ на $X_{(t, y)}$ при кограничном операторе Лере. (Отметим, что подынтегральное выражение в правой части замкнуто в $\mathbb{C}^n \setminus X_{(t, y)}$, поэтому правый интеграл не зависит от цикла, представляющего класс $\partial\sigma(t, y)$.) Доказательство приведенной формулы совпадает с доказательством леммы 1.

Таким образом, для всех (t, y) , близких к (t_0, y_0) , имеет место интегральное представление

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} dF(\cdot, y) \wedge \omega(y) / (F(\cdot, y) - t).$$

Теперь, применяя стандартную теорему анализа, получаем теорему 4.

Далее мы докажем голоморфную зависимость от параметров интегралов формы Гельфанда — Лере по непрерывному семейству циклов.

Б. Ф о р м а Г е л ь ф а н д а — Л е р е в комплексном случае определяется так же, как и в вещественном; см. п. 7.1.

Пусть f — функция, голоморфная в области пространства $\mathbb{C}^n$. Пусть η — голоморфная дифференциальная n -форма в той же области. Рассмотрим точку области, не являющуюся критической точкой функции.

Л е м м а 3. *Существует голоморфная дифференциальная $(n-1)$ -форма ψ , заданная в окрестности точки, для которой $\eta = df \wedge \psi$. Ограничение этой формы на гиперповерхность не критического уровня функции не зависит от выбора формы ψ , удовлетворяющей предыдущему равенству.*

Ограничение формы ψ на гиперповерхность не критического уровня функции называется *формой Гельфанда — Лере* формы η и обозначается через η/df .

Доказательство леммы см. в п. 7.1.

В. И н т е г р а л ы ф о р м ы Г е л ь ф а н д а — Л е р е. Вернемся к ситуации, описанной в начале пункта. Предположим, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задана голоморфная дифференциальная n -форма η , голоморфно зависящая от параметров y :

$$\eta = h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Таким образом, для фиксированных значений параметров на пространстве заданы голоморфная функция и голоморфная форма старшей размерности. Следовательно, на каждой гиперповерхности не критического уровня задана форма Гельфанда — Лере. Рассмотрим ее интегралы по циклам, выделенным на гиперповерхностях уровня:

$$I(t, y) = \int_{\sigma(t, y)} \eta(y)/d_x F(\cdot, y),$$

где d_x — дифференциал по переменным x .

Т е о р е м а 5 (см. [14, 185]). *Этот интеграл голоморфно зависит от (t, y) .*

Теорема 5 вытекает из интегрального представления

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \sigma(t, y)} \eta(y)/(F(\cdot, y) - t) \quad (2)$$

(ср. с (1)), его доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Г. П р о и з в о д н ы е ф у н к ц и и, заданной интегралом, полезно представлять в виде интегралов по тем же циклам. Такие формулы доставляют интегральные представления (1), (2).

Для сокращения записей будем в следующих формулах предполагать, что значения параметров форм такие же, как значения параметров циклов. Нижний индекс j у формы будет означать, что коэффициенты формы продифференцированы по y_j .

Согласно (1), (2) мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma(t, y)} \omega &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \sigma(t, y)} dF \wedge \omega / (F - t)^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \sigma(t, y)} d\omega / (F - t) = \int_{\sigma(t, y)} d_x \omega / d_x F, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \int_{\sigma(t, y)} \omega &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \sigma(t, y)} (dF \wedge \omega_j / (F - t) + dF_j \wedge \omega / (F - t) - F_j dF \wedge \omega / (F - t)^2) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \sigma(t, y)} (dF \wedge \omega_j / (F - t) - F_j d_x \omega / (F - t)) = \\ &= \int_{\sigma(t, y)} (\omega_j - F_j d_x \omega / d_x F). \quad (4) \end{aligned}$$

Второе равенство в этих формулах доказывается заменой формы на когомологичную.

10.3. Ветвление интеграла и разложение интеграла в ряд. Чтобы исследовать аналитические продолжения голоморфной функции, заданной интегралом, нужно уметь непрерывно деформировать циклы, по которым интегрируется форма, в гиперповерхности далеких некритических уровней функции. Для этого достаточно, чтобы совокупность гиперповерхностей некритических уравнений образовала локально тривиальное расслоение. Мы не будем разбирать максимально общую ситуацию, в которой это свойство имеет место (см. п. 1.1). Ограничимся локальным случаем, который будем разбирать в дальнейшем.

А. Расслоение Милнора деформации критической точки голоморфной функции. Пусть задан росток деформации изолированной критической точки голоморфной функции. (Обычно нас будут интересовать два крайних случая, в которых деформация миниверсальна или тривиальна.) *Расслоением Милнора* называется расслоение, слоями которого являются локальные неособые гиперповерхности уровня функций, составляющих деформацию. Приведем точное определение.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий конечнократную критическую точку. Пусть $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — его деформация, т. е. росток голоморфной функции со свойствами: $F(\cdot, 0) = f$. Рассмотрим *развертку* деформации, т. е. росток отображения $G: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0)$, заданный формулой $(x, y) \mapsto (F(x, y), y)$.

Пусть F, G — представители ростков F, G .

Для малых $\rho > 0$, $\eta > 0$, $\delta > 0$ рассмотрим в пространствах $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^k$ шары соответствующих радиусов: $B_\rho^n = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| < \rho\}$,

$B_\eta^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| < \eta\}$, $B_\delta^k = \{y \in \mathbb{C}^k \mid \|y\| < \delta\}$. Положим $S = B_\eta^1 \times B_\delta^k$, $X = (B_\rho^n \times B_\delta^k) \cap G^{-1}(S)$, $X_s = X \cap G^{-1}(s)$ для $s \in S$; см. рис. 73.

Выберем число ρ настолько малым, что при всех r , $0 < r \leq \rho$, граница ∂B_r^n шара радиуса r трансверсально пересекает гиперповерхность нулевого уровня функции $F(\cdot, 0)$. Выберем числа η , δ

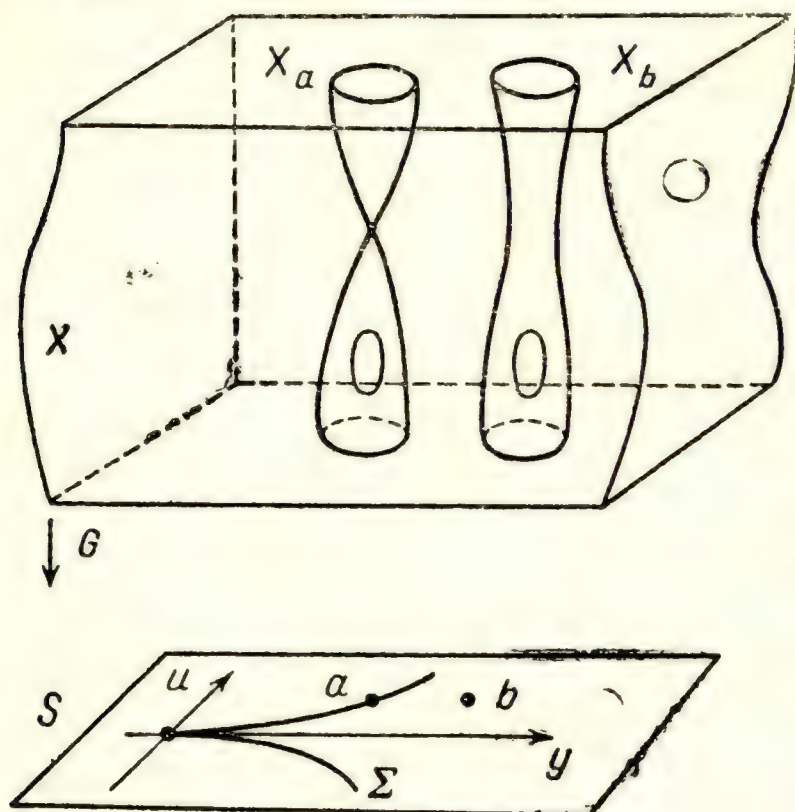


Рис. 73.

н настолько малыми по сравнению с числом ρ , что для любой точки $(u, y) \in S$ граница ∂B_ρ^n шара радиуса ρ трансверсально подходит к гиперповерхности уровня u функции $F(\cdot, y)$. Тройку чисел ρ , η , δ с указанными свойствами назовем *допустимой*.

Если тройка чисел допустима, то отображение $X \rightarrow S$, являющееся ограничением отображения G , назовем *специализацией развертки деформации*. Далее ограничения отображений будем обозначать теми же буквами, что и сами отображения.

Обозначим через Σ множество критических значений (*дискриминант*) отображения $G: X \rightarrow S$, т. е. множество $\{s \in S \mid X_s \text{ особо}\}$. Если тройка чисел ρ , η , δ допустима, то ограничение отображения $G: X \rightarrow S$ на дополнение к прообразу множества критических значений — гладкое локально тривиальное расслоение (см. п. 1.1), т. е. гладким локально тривиальным расслоением является отображение $G: X' \rightarrow S'$, где $S' = S \setminus \Sigma$, $X' = X \setminus G^{-1}(\Sigma)$. Это расслоение называется *расслоением Милнора деформации* (более точно, *расслоением Милнора специализации развертки деформации*).

Слой расслоения Милнора является $(n-1)$ -мерным комплексно-аналитическим многообразием с краем (и соответственно $(2n-2)$ -мерным вещественным многообразием). Согласно теореме Милнора [79] (см. также п. 2.1) слой гомотопически эквивалентен букету сфер средней размерности, число μ этих сфер равно кратности исходной критической точки. Таким образом,

$$X_s \sim \underbrace{S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}}_{\mu} \text{ при } s \in S'.$$

Дифференцируемый тип слоя расслоения Милнора не зависит от выбора допустимой тройки. Для разных допустимых троек ростки множеств Σ , S' в начале координат пространства S одинаковы. Если первое число первой тройки меньше первого числа второй тройки, то для всех точек базы, близких к началу координат, слой первого расслоения вложен в слой второго расслоения. Более того, первый слой является деформационным ретрактом второго слоя. Поэтому вложение первого слоя во второй индуцирует изо-

морфизм групп гомологий и когомологий слоев расслоений Милнора, отвечающих разным допустимым тройкам. В этом смысле гомологии и когомологии слоя расслоения Милнора определены инвариантно.

Нас будут интересовать группы $(n-1)$ -мерных гомологий и когомологий слоя расслоения Милнора. Они такие же, как у букета сфер, и являются свободными модулями над кольцом коэффициентов. Их размерности равны кратности исходной критической точки, если $n-1 > 0$, и на 1 больше кратности в случае $n-1=0$ (букет μ нульмерных сфер — это $\mu+1$ точка). Мы всегда (без дальнейших напоминаний) будем рассматривать группы приведенных *) гомологий и когомологий. Ранг группы приведенных (ко)гомологий вне зависимости от n равен кратности критической точки. При $n > 1$ приведенные $(n-1)$ -мерные (ко)гомологии совпадают с обычными.

Когомологии и гомологии слоя расслоения Милнора будут называться *исчезающими* в исходной критической точке.

Б. Ветвление интеграла. Пусть задан росток $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции, имеющий изолированную критическую точку. Пусть задана деформация $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ростка f . Выделим допустимую тройку чисел ρ, η, δ и рассмотрим отвечающие ей специализацию развертки и расслоение Милнора.

Предположим, что в одном из слоев расслоения Милнора выделен $(n-1)$ -мерный целочисленный класс гомологий. Непрерывные деформации представляющего его цикла определяют семейство $(n-1)$ -мерных целочисленных классов в слоях расслоения Милнора, которые непрерывно зависят от точки базы расслоения. Эта зависимость многозначна. Многозначность классов семейства описывается группой монодромии в $(n-1)$ -мерных гомологиях слоя расслоения: если в базе выделен замкнутый путь и выделен один из классов гомологий семейства над начальной точкой пути, то при распространении этого класса в слои над точками пути класс гомологий, отвечающий конечной точке пути, получается из класса гомологий, отвечающего начальной точке пути, действием преобразования монодромии, отвечающего этому пути.

Предположим, что в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ задана голоморфная дифференциальная $(n-1)$ -форма. Предположим, что эта окрестность настолько велика, что содержит пространство расслоения Милнора. Рассмотрим интегралы формы по циклам семейства. Согласно теореме 4 эти интегралы задают многозначную голоморфную функцию на базе расслоения Милнора.

*) Напомним, что группой *приведенных* k -мерных гомологий топологического пространства называется ядро отображения группы k -мерных гомологий пространства в группу k -мерных гомологий точки, индуцированного отображением пространства в точку. Аналогично группой *приведенных* k -мерных когомологий называется коядро отображения группы k -мерных когомологий точки в группу k -мерных когомологий пространства.

Ветвление этой функции описывается группой монодромии в $(n-1)$ -мерных гомологиях слоя расслоения Милнора. Если ω — форма, $\sigma(u, y)$ — класс гомологий семейства, лежащий в слое над точкой $(u, y) \in S'$, γ — замкнутый путь в базе расслоения с началом и концом в (u, y) , M_γ — отвечающее ему преобразование монодромии, то значение аналитического продолжения вдоль пути γ ветви функции, отвечающей интегралу $\int_{\sigma(u, y)} \omega$, равно $\int_{M_\gamma \sigma(u, y)} \omega$.

Таким образом, ветвление голоморфных функций, заданных интегралами по исчезающим в критической точке классам гомологий, определяется топологией расслоения Милнора рассматриваемой деформации и, в конечном итоге, топологией расслоения Милнора версальной деформации исходной критической точки.

З а м е ч а н и я. 1. Группа монодромии в $(n-1)$ -мерных гомологиях слоя расслоения Милнора версальной деформации критической точки называется *группой монодромии критической точки*. Группам монодромии критических точек посвящена глава 1. Всякий результат о группе монодромии можно рассматривать как результат о ветвлении соответствующих интегралов.

2. Предположим, что в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ задана голоморфная дифференциальная n -форма η (вместо $(n-1)$ -формы, как ранее). Форма η определяет на каждом слое расслоения Милнора голоморфную $(n-1)$ -форму $\eta/d_x F$ (форму η и функцию F нужно ограничить на подпространства в X' вида $y = \text{const}$, которые являются областями в $\mathbb{C}^n$, затем поделить форму на $d_x F$). Рассмотрим интегралы формы $\eta/d_x F$ по классам указанного выше семейства. Эти интегралы задают многозначную голоморфную функцию на базе расслоения Милнора (теорема 5). Ветвление этой функции, как и ветвление функции, заданной интегралами $(n-1)$ -формы, определяется группой монодромии в $(n-1)$ -мерных гомологиях слоя расслоения Милнора. Можно начинать не с n -формы, а с $(n+k)$ -формы, и делить ее не на $d_x F$, а на $d_x F \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$. В результате на каждом слое корректно определена голоморфная $(n-1)$ -форма. Ее интегралы по классам семейства определяют голоморфную многозначную функцию на базе расслоения Милнора (теорема 5). Ветвление этой функции, как и предыдущих, определяется группой монодромии.

3. Если $(n-1)$ -форма ω определена в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, не включающей в себя пространство расслоения Милнора для заданных допустимых чисел ρ, η, δ , то, вообще говоря, ее нельзя проинтегрировать по произвольному классу гомологий семейства. Однако ее можно проинтегрировать по классам семейства, лежащим в слоях над точками, расположенными достаточно близко к началу координат в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$. Это объясняется тем, что такие классы имеют представляющие циклы, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$. Точнее, область

определения формы (сколь бы мала она ни была) содержит пространство расслоения Милнора, определенного с помощью достаточно малых допустимых чисел, и теперь вложение слоя меньшего расслоения Милнора в слой большого расслоения Милнора индуцирует изоморфизм групп гомологий и когомологий (см. п. 11.3.А).

В. Р а з л о ж е н и е и н т е г р а л а в р я д. Предположим, что в пространстве S (базе специализации) выделена комплексная прямая. Предположим, что прямая не содержится в множестве критических значений Σ . В этом случае пересечение прямой с множеством критических значений дискретно. Рассмотрим одну из точек пересечения. Мы докажем, что ограничение на прямую многозначной голоморфной функции, заданной интегралом голоморфной формы по циклам непрерывного семейства (см. п. Б), в окрестности выделенной точки пересечения прямой с Σ разлагается в ряд по дробным степеням параметра на прямой, коэффициентами которого служат многочлены от логарифмов параметра на прямой. Это утверждение — прямой аналог теоремы 2.

Обозначим через t локальную голоморфную координату на прямой с началом в выделенной точке пересечения. В малой окрестности точки пересечения выделим сектор $a \leq \arg t \leq b$. Для каждого отличного от нуля значения параметра t , принадлежащего сектору, выделим базис $\sigma_1(t), \dots, \sigma_\mu(t)$ целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий слоя расслоения Милнора, лежащего над соответствующей точкой прямой, причем так, чтобы этот базис непрерывно зависел от точки прямой. Обозначим через M преобразование монодромии в гомологиях, отвечающее обходу параметра прямой по малому пути вокруг нуля «против часовой стрелки». (Напомним, что согласно теоремам 3.11, 3.12 собственные числа этого оператора являются корнями из 1 и размеры его жордановых клеток не превосходят n .) Пусть ω — голоморфная дифференциальная $(n-1)$ -форма, заданная на окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, содержащей пространство прообраза специализации деформации (см. определение в п. А). Тогда в указанном выше секторе определена вектор-функция

$$I(t) = \left(\int_{\sigma_1(t)} \omega, \dots, \int_{\sigma_\mu(t)} \omega \right).$$

Теорема 6 (см. [14, 146, 154, 166, 185, 187]). *Эта вектор-функция разлагается в ряд $\sum_{\alpha, k} a_{k, \alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Ряд сходится, если модуль параметра достаточно мал. Коэффициенты ряда — векторы пространства $\mathbb{C}^\mu$. Числа α — неотрицательные рациональные числа. Все коэффициенты $a_{k, 0}$ при $k > 0$ равны нулю. Каждое число α обладает свойством: $\exp(2\pi i \alpha)$ — собственное число оператора M . Коэффициент $a_{k, \alpha}$ равен нулю всякий раз, когда у жордановой формы оператора M нет блоков размеров $k+1$ и более с собственным числом $\exp(2\pi i \alpha)$.*

З а м е ч а н и е. Предположим, что прямая в базе S (о которой идет речь в теореме 6) является прямой значений функции F при фиксированном y и трансверсально пересекает дискриминант в точке, отвечающей невырожденной критической точке функции F при этом фиксированном y . В этом случае разложение, указанное в теореме 6, можно уточнить; см. лемму 12.2 на стр. 233.

Теорема 6 опирается на формулируемую ниже теорему 7 и выводится из нее так же, как теорема 2 из теоремы 3.

Т е о р е м а 7 (см. [185, 187, 188]). *Существует натуральное N , для которого в указанном выше секторе имеют место неравенства*

$$\left| \int_{\sigma_j(t)} \omega \right| \leq \text{const} \cdot |t|^{-N}, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Более того, если в секторе выделен луч $\arg t = \text{const}$, то существует конечный предел вектор-функции при стремлении параметра к нулю по лучу.

Мы не будем доказывать теорему 7 (см. [185] и замечания по поводу теоремы 3). У теоремы 7 есть уточнение (ср. с теоремой 3'), сформулируем его.

Сначала определим понятие семейства гомологий, исчезающих в выделенной точке пересечения прямой и дискриминанта Σ (ср. с определением в п. 11.1.В). Обозначим через X_t слой расслоения Милнора, лежащий над точкой прямой, в которой параметр равен t . Предположим, что на прямой выделен луч $\arg t = \text{const}$, и для каждого достаточно малого t , принадлежащего лучу, выделен класс гомологий $\sigma(t) \in H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$, непрерывно зависящий от t . Скажем, что это семейство гомологий является семейством *исчезающих* гомологий при стремлении параметра к нулю по лучу, если для каждого достаточно малого t класс $\sigma(t)$ принадлежит ядру естественного гомоморфизма

$$H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}\left(\bigcup_{s \in [0, t]} X_s, \mathbb{Z}\right).$$

Если непрерывное семейство гомологий определено для параметров, принадлежащих сектору, то легко показать, что свойство быть семейством исчезающих гомологий не зависит от луча сектора.

Т е о р е м а 7 (см. [185]). *Пусть непрерывное семейство гомологий определено для параметров, принадлежащих сектору. Предположим, что семейство является семейством исчезающих гомологий при стремлении параметра к нулю по одному из лучей сектора. Тогда предел интеграла $\int_{\sigma(t)} \omega$ равен нулю при стремлении параметра к нулю по лучу.*

Напомним, что существование конечного предела следует из теоремы 7.

Следствие теоремы 7'. Интеграл голоморфной формы по семейству исчезающих гомологий в каждом секторе разлагается в ряд $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$, в котором все α положительны.

Г. Расслоение Милнора критической точки. Рассмотрим росток $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции, имеющий изолированную критическую точку. Росток является собственной тривиальной деформацией. Рассмотрим для такой деформации объекты, введенные в предыдущих пунктах. А именно, рассмотрим специализацию $f: X \rightarrow S$ ростка и соответствующее расслоение Милнора $f: X' \rightarrow S'$.

Для любой голоморфной дифференциальной $(n-1)$ -формы на X ее интегралы по классам непрерывного семейства целочисленных исчезающих гомологий определяют голоморфную многозначную функцию на проколоте диске S' . Ветвление этой функции при обходе параметра вокруг нуля определяется преобразованием монодромии в гомологиях, которое в данном случае называется классической монодромией (см. п. 2.1). В каждом секторе $a \leq \arg t \leq b$ эта функция разлагается в ряд $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. В этом ряде все показатели степеней параметров положительны. Кроме того, все показатели степеней параметров являются деленными на $2\pi i$ логарифмами собственных чисел оператора классической монодромии. Произвольная степень логарифма параметра в этом ряде меньше, чем максимум размеров жордановых блоков оператора классической монодромии с соответствующим собственным числом (см. теоремы 7, 7').

Рассмотрим на пространстве X голоморфную дифференциальную n -форму η и непрерывное многозначное семейство целочисленных исчезающих гомологий $\sigma(t)$, где $t \in S'$. Рассмотрим на базе расслоения Милнора многозначную голоморфную функцию $\int_{\sigma(t)} \eta/df$.

Теорема 8 (см. [185]). В каждом секторе $a \leq \arg t \leq b$ эта функция разлагается в ряд $\sum_{\alpha, k} a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Ряд сходится, если модуль параметра достаточно мал. Все числа α рациональны. Каждое число α больше -1 . Каждое число α обладает свойством: $\exp(2\pi i \alpha)$ — собственное число оператора классической монодромии в гомологиях. Коэффициент $a_{k,\alpha}$ равен нулю всякий раз, когда у классической монодромии нет жордановых блоков размеров $k+1$ и более с собственным числом $\exp(2\pi i \alpha)$.

Доказательство. В силу леммы Пуанкаре $\eta = d\omega$, где ω — голоморфная дифференциальная $(n-1)$ -форма. Согласно формуле (3) на стр. 209 $\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \omega = \int_{\sigma(t)} \eta/dt$. Теперь теорема следует из теоремы 6.

З а м е ч а н и е о применении леммы Пуанкаре. Легко показать, что X — многообразие Штейна (см. определение в [40, 98]), сле-

довательно, когомологии многообразия X можно вычислять с помощью голоморфных форм (см. [217], [98, теорема 12.13]). X стягиваемо, форма η замкнута, поэтому на X существует голоморфная $(n-1)$ -форма ω , для которой $\eta = d\omega$. Можно доказывать теорему 8, не используя штейновости многообразия X . В силу стандартной леммы Пуанкаре для данной формы η существует голоморфная $(n-1)$ -форма ω , заданная в достаточно малой окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$, для которой $\eta = d\omega$. Теперь формула (5) справедлива для всех достаточно малых t . Этого утверждения достаточно для доказательства теоремы 8.

Пример. Пусть $f = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Пространство исчезающих гомологий порождается исчезающим циклом. Пусть $\sigma(t)$ — исчезающий цикл над t , непрерывно зависящий от параметра. При обходе параметра вокруг нуля $\sigma(t) \mapsto (-1)^n \sigma(t)$. Пусть ω — голоморфная дифференциальная $(n-1)$ -форма. Рассмотрим голоморфную функцию $I(t) = \int_{\sigma(t)} \omega$. По теореме 6 $I(t) = \sum a_\alpha t^\alpha$, где α — целые при четном и полуцелые при нечетном n . Разлагая ω на однородные составляющие $\omega_{n-1} + \omega_n + \dots$ и пользуясь однородностью ростка, получаем, что интеграл $\int_{\sigma(t)} \omega_p$ равен 0, если $p - n$ нечетно, и равен $a_{p/2} t^{p/2}$, если $p - n$ четно. Вычислим первый коэффициент $a_{n/2}$. Считая t вещественным, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(t)} \sum_j (-1)^j A_j x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n = \\ = \sum_j A_j \int_0^t \left(\int_{\sigma(s)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n / df \right) dt = \sum_j A_j \text{Vol}(D^n) t^{n/2}, \end{aligned}$$

где $\text{Vol}(D^n)$ — объем n -мерного шара радиуса 1.

§ 11. Комплексные осциллирующие интегралы

При изучении асимптотического поведения функций часто приходится исследовать асимптотическое поведение интегралов вида

$$\int_{\Gamma} e^{\tau f(x)} \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

при больших значениях параметра τ . Здесь f, φ — голоморфные функции на $\mathbb{C}^n$; Γ — вещественная n -мерная цепь, расположенная в $\mathbb{C}^n$; τ — большой вещественный параметр. Функция f называется *фазой*, функция φ — *амплитудой*. Такие интегралы называются *интегралами метода перевала*. Примеры задач, в которых возникает необходимость их исследования, см., например, в книге [96].

Метод перевала, которым исследуются такие интегралы, состоит в следующем. По формуле Стокса, интеграл не изменится, если

цепь деформировать, не меняя ее границы. Поэтому цепь, не изменяя ее границы, деформируют так, чтобы уменьшить на ней величину вещественной части фазы (именно она при больших положительных значениях параметра определяет величину интеграла). Уменьшать вещественную часть фазы можно сдвигом внутренности цепи вдоль траектории градиента фазы. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока цепь не наткнется на критические точки фазы, в которых градиент равен нулю. Дальнейшие деформации приведут к уменьшению вещественной части фазы на части цепи, не наткнувшейся на критические точки, но не изменят максимума вещественной части фазы на цепи. Теперь задача исследования асимптотики интеграла сводится к локальным задачам оценки интеграла в окрестностях критических точек фазы, на которые наткнулась цепь, и к оценке интеграла в окрестности границы цепи, если максимум вещественной части фазы достигается на границе цепи.

Таким образом, метод перевала состоит из двух частей: топологической, заключающейся в указании нужным образом продеформированной цепи (называемой *перевальным контуром*), и аналитической, состоящей из оценки интеграла по перевальному контуру в окрестностях критических точек фазы, а также из оценки интеграла по окрестности границы перевального контура (если максимум вещественной части фазы достигается на границе цепи). В приложениях, как правило, максимум вещественной части фазы достигается не на границе.

Этот параграф посвящен аналитической части метода перевала: мы изучим асимптотическое поведение интеграла метода перевала по цепи, расположенной в малой окрестности изолированной критической точки фазы, причем расположенной так, что на границе цепи вещественная часть фазы меньше вещественной части критического значения фазы. Мы покажем, что в этом случае интеграл разлагается в асимптотический ряд вида $e^{\tau f(x_0)} \sum a_{k, \alpha} \tau^\alpha (\ln \tau)^k$. Мы покажем, что степени параметра и степени логарифма параметра в этом ряде связаны с оператором (классической) монодромии в $(n-1)$ -мерных гомологиях расслоения Милнора критической точки фазы. А именно, показатели степеней параметра являются деленными на $2\pi i$ логарифмами собственных чисел оператора монодромии, и показатели степеней логарифмов параметра меньше максимума размеров жордановых блоков оператора монодромии с соответствующим собственным числом.

Это явление имеет следующее объяснение. Граница цепи интеграла метода перевала естественным образом определяет непрерывное семейство целочисленных исчезающих гомологий в слоях расслоения Милнора (см. п. 11.1.Б). Рассмотрим функцию на базе расслоения Милнора, заданную интегралами по классам семейства формы $\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n / df$, где f, φ — фаза и амплитуда интеграла метода перевала. Оказывается, что интеграл метода перевала является

(правильно понимаемым) преобразованием Лапласа этой функции. Сама функция в окрестности критического значения фазы разлагается в ряд по дробным степеням аргумента и целым степеням логарифма аргумента (теорема 10.8). Связь этих степеней с оператором монодромии указана в теореме 10.8. Мы доказываем, что почленное преобразование Лапласа этого ряда приводит к асимптотическому ряду для интеграла метода перевала.

Это — первая тема параграфа.

Во второй части параграфа мы рассматриваем осциллирующие интегралы по $\mathbb{R}^n$ с аналитической фазой, предполагая при этом, что носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности конечнократной критической точки фазы. Фазу интеграла можно комплексифицировать и считать голоморфной функцией на $\mathbb{C}^n$, вещественной на вещественной части комплексного пространства. Теперь можно сравнивать асимптотическое поведение осциллирующего интеграла по $\mathbb{R}^n$ с асимптотическим поведением интегралов метода перевала с указанной комплексифицированной фазой. Мы доказываем, что в окрестности критической точки фазы существует такой перевальный контур (называемый *вещественным*), интеграл по которому имеет то же асимптотическое разложение, что и осциллирующий интеграл по $\mathbb{R}^n$. Это утверждение имеет два следствия. В качестве первого следствия мы получаем новое доказательство теоремы 6.3 об асимптотическом разложении осциллирующего интеграла. В качестве второго следствия мы получаем геометрический смысл показателей степеней параметра и показателей степеней логарифма параметра в асимптотическом разложении осциллирующего интеграла: показатели выражаются через жорданову структуру оператора классической монодромии комплексификации критической точки фазы.

Это — вторая тема параграфа.

В третьей части параграфа мы рассматриваем интегралы с фазой $f(x) + g(y)$ и выражаем их асимптотики через интегралы с фазами f , g .

Основные результаты параграфа (теоремы 1, 3, 4) принадлежат Б. Мальгранжу [185].

11.1. Интегралы метода перевала. Рассмотрим функцию $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, голоморфную в окрестности своей критической точки в начале координат. Рассмотрим n -мерную цепь Γ , расположенную в малой окрестности критической точки. Предположим, что на границе цепи вещественная часть значений функции отрицательна. Цепь с таким свойством назовем *допустимой*. Рассмотрим голоморфную дифференциальную n -форму ω , заданную в окрестности критической точки. Мы будем изучать асимптотическое поведение интеграла $\int_{\Gamma} e^{\tau f(x)} \omega$ при больших положительных значениях параметра τ . Интеграл называется *комплексным осциллирующим интегралом* или *интегралом метода перевала*.

Скажем, что две цепи Γ и Γ' эквивалентны, если существует расположенная в малой окрестности критической точки $(n+1)$ -мерная цепь V со свойством: на n -мерной цепи $\Gamma - \Gamma' + \partial V$ (после сокращений) вещественная часть значений функции отрицательна.

Лемма 1. Пусть Γ, Γ' — две эквивалентных допустимых цепи. Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$

$$\int_{\Gamma} e^{\tau f} \omega - \int_{\Gamma'} e^{\tau f} \omega = o(\tau^{-N})$$

для любого натурального N .

Доказательство. $\Gamma = \Gamma' + \partial V + \Gamma''$, где $\operatorname{Re} f|_{\Gamma''} < 0$. Следовательно, $\int_{\Gamma} - \int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''}$, но последний интеграл экспоненциально мал.

Мы будем изучать асимптотическое поведение комплексных осциллирующих интегралов с точностью до слагаемых, малых по сравнению с τ^{-N} при любом натуральном N .

Пример. Пусть $f(x) = x^3$, $\omega = dx$. Произвольный допустимый контур эквивалентен линейной комбинации двух контуров Γ_1, Γ_2 , изображенных на рис. 74. Интегралы по Γ_1 и Γ_2 сопряжены.

$$\int_{\Gamma_1} e^{\tau x^3} dx = (1 - e^{+2\pi i/3}) \int_0^1 e^{-\tau x^3} dx = (\dots) \tau^{-1/3} \int_0^{\infty} e^{-x^3} dx + o(\tau^{-N}).$$

Уточним понятия допустимых и эквивалентных контуров.

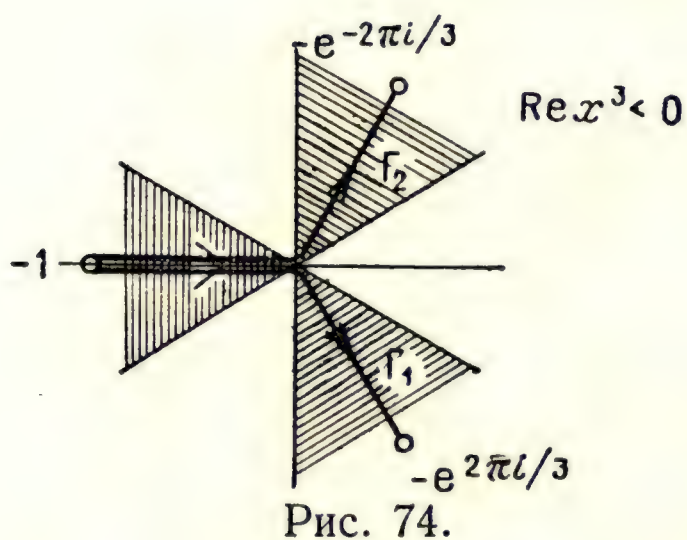


Рис. 74.

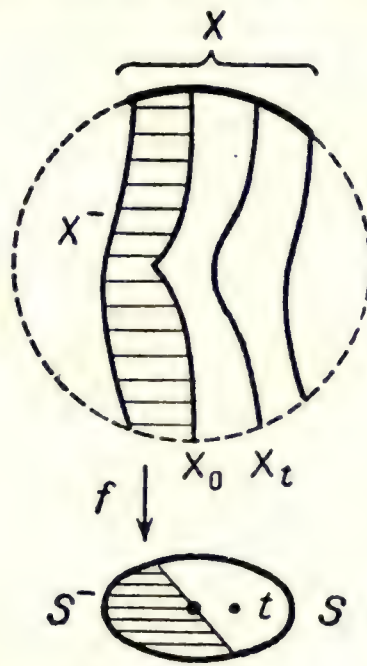


Рис. 75.

А. Уточнение определений. Предположим, что функция $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфна в начале координат и имеет в начале координат конечнократную критическую точку. Рассмотрим пару положительных чисел ρ, η . Обозначим через S диск $\{t \in \mathbb{C}^1 \mid |t| < \eta\}$, через S^- — его левую половину: $\{t \in S \mid \operatorname{Re} t < 0\}$. Обозначим через X множество $\{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) \in S, \|x\| < \rho\}$, через X^- — множество $X \cap f^{-1}(S^-)$, через X_t — множество $X \cap f^{-1}(t)$ (см.

рис. 75). Будем предполагать, что пара чисел ρ, η допустима для критической точки (см. п. 10.3.А).

n -мерную цепь $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ назовем *допустимой*, если $\Gamma \subset X$, $\partial\Gamma \subset X^-$. Допустимые цепи Γ, Γ' назовем *эквивалентными*, если существует $(n+1)$ -мерная цепь $V \subset X$ со свойством: $(\Gamma - \Gamma' + \partial V) \subset X^-$. Классы эквивалентности допустимых цепей относительно операций сложения и умножения на числа образуют векторное пространство, по определению совпадающее с $H_n(X, X^-)$.

Б. Разложение в ряд. С каждым элементом $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$ свяжем семейство $(n-1)$ -мерных классов приведенных гомологий в слоях расслоения Милнора, лежащих над S^- . Для этого рассмотрим точную последовательность $\dots \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, X^-) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^-) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$. Числа ρ, η допустимы. Поэтому X стягиваемо и ∂ — изоморфизм группы $H_n(X, X^-)$ и группы приведенных $(n-1)$ -мерных гомологий пространства X^- .

Ограничение отображения f на $X' = X \setminus X_0$ — гладкое локально тривиальное расслоение (расслоение Милнора критической точки). В частности, $f: X^- \rightarrow S^-$ — тривиальное расслоение. Поэтому гомологии множества X^- изоморфны гомологиям произвольного слоя над S^- . Таким образом определен изоморфизм $\partial_t: H_n(X, X^-) \rightarrow H_{n-1}(X_t)$ для любого $t \in S^-$, где $H_{n-1}(X_t)$ — это группа приведенных гомологий. Если Γ — допустимая цепь, представляющая элемент $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$, то, взяв границу цепи Γ и стянув ее в множестве X^- в слой X_t , получим цикл, представляющий элемент $\partial_t[\Gamma] \in H_{n-1}(X_t)$. Семейство классов $\partial_t[\Gamma]$ непрерывно зависит от $t \in S^-$.

В примере на стр. 219 слой X_t расслоения Милнора состоит из корней уравнения $x^3 = t$. Элементу $[\Gamma_1] \in H_1(X, X^-)$ отвечает семейство нульмерных гомологий $\partial_t[\Gamma_1]$. Класс $\partial_t[\Gamma_1]$ представляет цикл $x^0 - x^1$, где x^0 — нижняя точка слоя, x^1 — левая (см. рис. 74).

Лемма 2. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X , $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$. Тогда

$$\int_{[\Gamma]} e^{\tau f} \omega \approx \int_0^{t_0} e^{-\tau t} \left(\int_{\partial_{-t}[\Gamma]} \omega/df \right) dt. \quad (1)$$

Здесь t_0 — малое положительное число, принадлежащее S ; в правой части стоит интеграл по отрезку вещественной оси; знак $\approx$ означает, что правая часть отличается от левой на слагаемое $o(\tau^{-N})$ при $\tau \rightarrow +\infty$, где N — любое число.

Эта лемма связывает интегралы метода перевала с интегралами голоморфных форм по семействам исчезающих классов гомологий. Интеграл голоморфной формы разлагается в ряд по степеням параметра и степеням логарифма параметра (см. § 10). Формула (1) позволяет интеграл метода перевала разложить в аналогичный ряд.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем цепь Γ , представляющую $[\Gamma]$, так, чтобы $\partial\Gamma \subset X_{-t_0}$. Тогда для любой голоморфной $(n-1)$ -формы φ на X

$$\int_{\Gamma} d\varphi = \int_0^{-t_0} \left(\int_{\partial_t [\Gamma]} d\varphi/df \right) dt. \quad (2)$$

Действительно, по формуле Стокса левый интеграл равен интегралу по $\partial\Gamma$ формы φ . Цикл $\partial\Gamma$ представляет $\partial_{-t_0} [\Gamma]$. Рассмотрим функцию $J(t) = \int_{\partial_t [\Gamma]} \varphi$. Она голоморфна на S^- и стремится к нулю при

стремлении параметра к нулю по радиусу (см. теоремы 10.4, 10.7). Следовательно, ее значение в t_0 равно интегралу ее производной от 0 до $-t_0$. По формуле (3) на стр. 209 производная функции J задается интегралом формы $d\varphi/df$. Формула (2) доказана.

При фиксированном τ на X найдется голоморфная $(n-1)$ -форма φ со свойством: $d\varphi = e^{\tau f} \omega$ (по лемме Пуанкаре). Теперь формула (2), примененная к φ , дает утверждение леммы.

З а м е ч а н и е. Здесь как и в теореме 10.8 нужна аккуратность при применении леммы Пуанкаре; см. замечание на стр. 215.

Т е о р е м а 1 (см. [185]). Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X , $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$. Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$ интеграл

$$\int_{[\Gamma]} e^{\tau f} \omega \quad (3)$$

разлагается в асимптотический ряд

$$\sum_{\alpha, k} a_{k, \alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k. \quad (4)$$

Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. А именно, каждое число α обладает свойством: $\exp(-2\pi i \alpha)$ — собственное число оператора классической монодромии критической точки фазы. Коэффициент $a_{k, \alpha}$ равен нулю всякий раз, когда у классической монодромии нет жордановых блоков размеров $k+1$ и более с собственным числом $\exp(-2\pi i \alpha)$.

Доказательство следует из (1). Внутренний интеграл в правой части формулы (1) разлагается на вещественной положительной полуоси в ряд

$$\sum b_{k, \alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k, \quad (5)$$

указанный в теореме 10.8 на стр. 215. Легко видеть, что асимптотическое разложение интеграла (3) можно получить, вычисляя асимптотики интегралов от отдельных членов ряда (5). Воспользовав-

шись стандартной формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau t} t^{\alpha} (\ln t)^k dt = \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^k \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha+1}} \right), \quad (6)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, и заменяя $\int_0^1$ на $\int_0^{\infty}$, получим ряд (4).

Замечание. Ряд (4) определяет ряд (5). Поэтому эквивалентны задачи исследования асимптотик интегралов метода перевала и интегралов голоморфных форм по классам гомотопий непрерывных семейств исчезающих гомотопий.

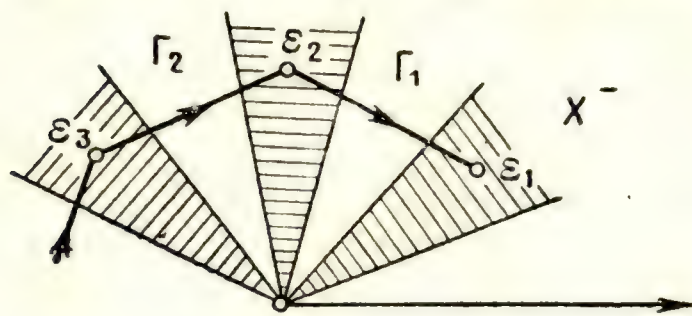


Рис. 76.

В. Пример. Пусть $f = x^{\mu+1}$; $x = 0$ — критическая точка кратности μ . Зафиксируем цепи $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\mu}$, порождающие базис в $H_1(X, X^-)$.

Для этого обозначим через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu+1}$ корни уравнения $x^{\mu+1} = -1$, где $\arg \varepsilon_j = \pi(2j-1)/(\mu+1)$, и положим Γ_j равной отрезку $\overrightarrow{\varepsilon_{j+1}\varepsilon_j}$; см. рис. 76. Обозначим через ω_l форму $x^{l-1} dx$.

Лемма 3. При $1 \leq l, j \leq \mu$

$$\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f} \omega_l = a \tau^{\alpha},$$

где $a = (\varepsilon_{j+1}^l - \varepsilon_j^l) \Gamma(l/(\mu+1))/(\mu+1)$, $\alpha = -l/(\mu+1)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Замечание. Интеграл с фазой $x^{\mu+1}$ и произвольной формой ω интегрированием по частям сводится к линейной комбинации интегралов с той же фазой и формами ω_l , $l = 1, \dots, \mu$. Коэффициентами линейной комбинации служат формальные ряды от $1/\tau$.

Доказательство леммы. Для отрицательных t обозначим через $\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_{\mu+1}(t)$ корни уравнения $x^{\mu+1} = t$, где $\arg \varepsilon_j(t) = \pi(2j-1)/(\mu+1)$. Для таких t $\partial_t[\Gamma_j]$ представляется 0-циклом $\varepsilon_j(t) - \varepsilon_{j+1}(t)$. 0-форма ω_l/df равна функции $x^{l-\mu-1}/(\mu+1)$. Следовательно,

$$\int_{\partial_t[\Gamma_j]} \omega_l/df = (\varepsilon_{j+1}^l - \varepsilon_j^l) |t|^{l/(\mu+1)-1}/(\mu+1). \quad (7)$$

Теперь лемма 3 следует из леммы 2 и формулы (6).

В заключение отметим важное свойство форм $\omega_1, \dots, \omega_{\mu}$ примера.

Лемма 4. Формы $\omega_1/df, \dots, \omega_{\mu}/df$ порождают базис в исчезающих когомологиях в каждом слое расслоения Милнора. Более

того,

$$\det^2 \left(\int_{\partial_t [\Gamma_j]} \omega_l / df \right) = C_\mu t^{-\mu},$$

где $1 \leq j, l \leq \mu$, C_μ — отличная от нуля константа.

Доказательство. В силу формулы (7) достаточно доказать, что не существует отличного от нуля многочлена $P = \alpha_1 x + \dots + \alpha_\mu x^\mu$, принимающего равные значения в точках $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu+1}$. Очевидно, что $P(\varepsilon_1) = \dots = P(\varepsilon_{\mu+1}) = (P(\varepsilon_1) + \dots + P(\varepsilon_{\mu+1})) / (\mu + 1) = 0$. Следовательно, $P \equiv 0$.

Следствие.

$$\det \left(\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f} \omega_l \right) = B_\mu \tau^{-\mu/2},$$

где B_μ — отличная от нуля константа.

Замечание. Ниже мы докажем при помощи леммы 4 и ее следствия, что для любой критической точки кратности μ существуют формы $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, которые после деления на дифференциал фазы порождают базис в исчезающих когомологиях в каждом слое расслоения Милнора (см. теорему 12.1).

11.2. Осциллирующий интеграл — частный случай интеграла метода перевала. Рассмотрим функцию $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, голоморфную в начале координат и имеющую в начале координат критическую точку. Предположим, что значения функции на вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ вещественны. Такая функция может служить как фазой осциллирующего интеграла по $\mathbb{R}^n$, так и фазой интеграла метода перевала. Докажем, что существует расположенная в окрестности начала координат допустимая n -цепь Γ , для которой

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f} \varphi dx \approx \int_{\Gamma} e^{i\tau f} \varphi dx \quad (8)$$

при всех φ с носителем в достаточно малой окрестности начала координат. Таким образом, осциллирующий интеграл является частным случаем интеграла метода перевала.

Сделаем три уточнения. Во-первых, равенство выполняется с точностью до слагаемого, убывающего быстрее любой степени параметра τ при $\tau \rightarrow +\infty$. Во-вторых, допустимая цепь для интеграла с фазой $i\tau f$ (вместо τf как в предыдущем пункте) — это цепь, на границе которой положительна мнимая часть функции f . В-третьих, амплитуда φ должна быть определена не только на $\mathbb{R}^n$, но и на Γ ; поэтому равенство (8) будет доказано для амплитуд вида $\psi\theta$, где ψ — голоморфная функция, а θ — гладкая финитная функция с носителем, сосредоточенным в достаточно малой окрестности начала координат, и тождественно равная 1 в еще меньшей окрестности начала координат.

Согласно теореме 1 асимптотики правого интеграла выражаются через жорданову структуру оператора классической монодромии критической точки. Следовательно, таким же образом связаны с оператором монодромии асимптотики левого интеграла. При этом не важно, что равенство (8) доказано только для аналитических амплитуд φ (см. ниже лемму 5).

А. Изменение определений. В связи с наличием в фазе интеграла (8) числа i изменим (только в этом пункте) определение допустимой цепи. Предположим, что f имеет конечнократную критическую точку в начале координат. Воспользуемся обозначениями из п. 11.1. А и обозначим через S^{+i} полукруг $\{t \in S \mid \operatorname{Im} t > 0\}$. Обозначим через X^{+i} множество $X \cap f^{-1}(S^{+i})$. n -мерную цепь $\Gamma \subset X$ назовем *допустимой*, если $\partial\Gamma \subset X^{+i}$. Две допустимых цепи назовем *эквивалентными*, если они определяют один класс в $H_n(X, X^{+i})$. Интеграл $\int_{\Gamma} e^{i\tau f} \omega$ голоморфной n -формы ω по допустимой цепи Γ назовем *интегралом метода перевала*. Интегралы по эквивалентным цепям имеют равные асимптотические разложения при $\tau \rightarrow +\infty$ (лемма 1). Переформулируем теорему 1.

Теорема 2. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X , $[\Gamma] \in H_n(X, X^{+i})$. Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$ интеграл $\int_{[\Gamma]} e^{i\tau f} \omega$ разлагается в асимптотический ряд $\sum a_{k, \alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k$, обладающий свойствами, указанными в теореме 1.

Б. Теорема 3 (см. [185]). Предположим, что значения функции f вещественны на вещественном подпространстве. Тогда существует класс $[\Gamma_{\mathbb{R}}] \in H_n(X, X^{+i})$ (называемый *вещественным*), который обладает следующим свойством. Пусть $\theta: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в X и тождественно равная 1 в окрестности начала координат. Тогда для любой голоморфной функции $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f} \varphi \theta dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \approx \int_{[\Gamma_{\mathbb{R}}]} e^{i\tau f} \varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

с точностью до слагаемого, являющегося для любого N величиной $o(\tau^{-N})$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Следствие теорем 2, 3 (ср. с теоремой 6.3 об асимптотическом разложении). Осциллирующий интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f} \psi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ разлагается в асимптотический ряд $\sum a_{k, \alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k$ при $\tau \rightarrow +\infty$, если амплитуда имеет вид, указанный в теореме 3. В этом ряде параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. А именно, каждое число α обладает свойством: $\exp(-2\pi i \alpha)$ — собственное число оператора классической монодромии критической точки фазы, рассматри-

ваемой как голоморфная функция. Коэффициент $a_{k, \alpha}$ равен нулю всякий раз, когда у классической монодромии нет жордановых блоков размеров $k+1$ и более с собственным числом $\exp(-2\pi i \alpha)$.

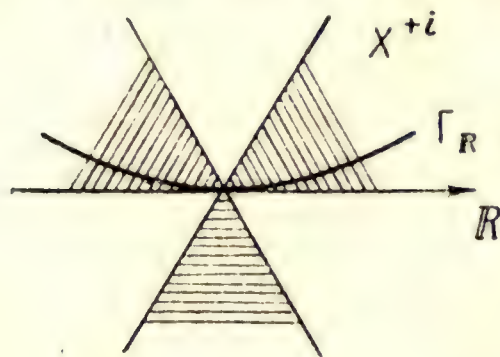
З а м е ч а н и я. 1. С помощью леммы 5 (см. ниже) указанное условие на амплитуду заменяется условием: носитель амплитуды должен лежать в достаточно малой окрестности начала координат.

2. Интересно было бы описать все вещественные классы $[\Gamma_R]$ для разных вещественных форм одной и той же голоморфной функции f .

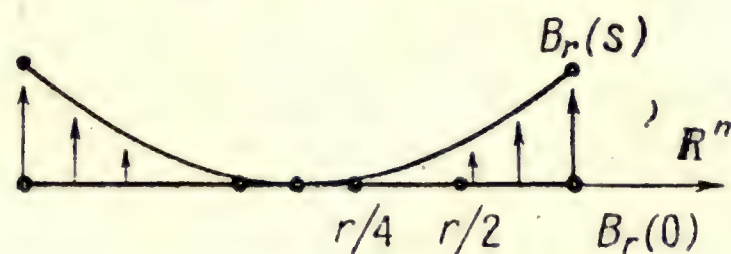
В п. 9.2 приведен пример двух комплексно-эквивалентных ростков аналитических функций, у которых разные показатели особенности. Следовательно, отвечающие этим вещественным формам вещественные классы по-разному расположены относительно линейных функций, задаваемых интегралами метода перевала на $H_n(X, X^{+i})$.

Доказательство теоремы 3. Мы построим цепь Γ_R , представляющую класс $[\Gamma_R]$, а затем докажем для нее теорему. Цепь Γ_R — это часть вещественного пространства $\mathbb{R}^n$, лежащая в X , с краями, загнутыми в X^{+i} . Края загнуты вдоль траекторий векторного поля $i \cdot \text{grad } f$.

Прежде чем уточнить построение, приведем пример. Пусть $f = x^3$. Тогда цепь Γ_R изображена на рис. 77, а.



а)



б)

Рис. 77.

Выберем достаточно малое $r > 0$ и рассмотрим гладкое векторное поле ξ на X , равное нулю при $|x| < r/4$ и обладающее свойствами $\xi(\text{Im } f) \geq 0$, $\xi(\text{Im } f) > 0$ при $x \geq r/2$; см. рис. 77, б.

Пусть B_r — это пересечение шара $|x| \leq r$ и $\mathbb{R}^n$. Для достаточно малых $s > 0$ диффеоморфизм $\exp(s\xi)$ определяет в X диск $B_r(s) = \exp(s\xi)(B_r)$, граница которого лежит в X^{+i} . Следовательно, $B_r(s)$ определяет класс в $H_n(X, X^{+i})$, который очевидно не зависит от s . Покажем, что для этого класса справедлива теорема 3.

Мы можем предполагать, что носитель функции θ лежит в шаре $|x| < 3r/4$ и $\theta \equiv 1$ на шаре $|x| \leq r/2$ (изменение функции θ вне начала координат не меняет асимптотического разложения осциллирующего интеграла).

Теперь, с одной стороны, подынтегральные выражения интегралов $\int_{B_r(s)} e^{i\tau f} \varphi \theta dx$ и $\int_{B_r(s)} e^{i\tau f} \varphi dx$ отличаются только на компакте в X^{+i} , и, значит, разность этих интегралов экспоненциально мала.

С другой стороны,

$$\int_{B_r(s)} e^{i\tau f} \theta \varphi dx = \int_{B_r} (\exp(s\xi))^* [e^{i\tau f} \theta \varphi dx].$$

Подынтегральное выражение правого интеграла запишем в виде $e^{i\tau f s} (\theta \varphi)_s dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Тогда при достаточно малых $s > 0$:

- а) $\operatorname{Im} f_s \geq 0$ на B_r ,
- б) f_s не имеет критических точек на $B_r \setminus 0$,
- в) $f_s = f$, $(\theta \varphi)_s = \theta \varphi$ на $B_{r/4}$.

Из а) — в) следует, что $\int_{B_r} e^{i\tau f} \theta \varphi dx$ и $\int_{B_r} e^{i\tau f s} (\theta \varphi)_s dx$ отличаются при $\tau \rightarrow +\infty$ на $o(\tau^{-N})$ для любого N . Теорема доказана.

Докажем лемму, выражающую асимптотики осциллирующего интеграла с гладкой амплитудой через асимптотики интегралов с амплитудой вида, указанного в теореме 3.

Лемма 5. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$ — одночлены, порождающие базис над $\mathbb{R}$ в локальной алгебре $\mathbb{R}\{x\}/(\partial f/\partial x)$, и пусть функция θ — такая же, как в теореме 3. Тогда для любой гладкой амплитуды φ с носителем, лежащим в достаточно малой окрестности начала координат, при $\tau \rightarrow +\infty$ имеет место равенство асимптотических рядов

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f} \varphi dx \approx \sum_{k=1}^{\mu} c_k(\tau^{-1}) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f} \varphi_k \theta dx,$$

где c_k — подходящие формальные ряды от $1/\tau$.

Доказательство. Представим φ в виде

$$\varphi = \sum a^k \varphi_k \theta + \sum h^k \partial f / \partial x_k,$$

где a^k — числа, h^k — гладкие финитные функции. Тогда

$$\int e^{i\tau f} \varphi dx = \sum a^k \int e^{i\tau f} \varphi_k \theta dx + \frac{1}{i\tau} \int e^{i\tau f} \sum (-1)^{k+1} \partial h^k / \partial x_k dx.$$

Числа $a^1, \dots, a^\mu$ — свободные члены рядов $c_1(\tau^{-1}), \dots, c_\mu(\tau^{-1})$. Преобразуя правый интеграл аналогично тому, как был преобразован исходный интеграл, получим коэффициенты формальных рядов, стоящие при τ^{-1} и т. д.

Замечание. В [198] доказано, что ряды $\{c_k(\tau^{-1}) = \sum c_k^j \tau^{-j}\}$ после деления j -го коэффициента на $j!$ сходятся для достаточно больших τ , если амплитуда φ имеет вид, указанный в теореме 3.

В. Показатели особости простых критических точек и числа Кокстера. В. И. Арнольд отмечено следующее явление (см. [3, 4]): показатели осцилляции простых критических точек гладких функций трех переменных даются формулой $\beta = -1 - 1/N$, где N — число Кокстера соответствующей группы, порожденной отражениями. Теорема 3 объясняет присутствие в этой формуле числа N .

Утверждение. *Осциллирующий интеграл с фазой, зависящей от трех переменных и имеющей простую критическую точку, разлагается в асимптотический ряд $\sum a_\alpha t^\alpha$, где α — рациональные числа со знаменателем, равным числу Кокстера соответствующей группы, порожденной отражениями.*

Действительно, в этом случае оператор монодромии — преобразование Кокстера соответствующей группы (см. теорему 3.14). Поэтому $M^N = \text{Id}$. По теореме 3 показатели α после умножения на N — целые числа.

11.3. Комплексные осциллирующие интегралы с фазой $f(x) + g(y)$. Асимптотики интегралов с фазой $f + g$ выражаются через асимптотики интегралов с фазами f, g , поскольку экспонента суммы равна произведению экспонент слагаемых. В частности, асимптотики интегралов с фазой $x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$ выражаются через асимптотики интегралов с фазой $x_1^{\mu+1}$ (которые вычислены в п. 11.1.В). Из этих выражений извлекается нетривиальная информация об асимптотиках интегралов с произвольной фазой, поскольку произвольная изолированная критическая точка встречается в версальной деформации критической точки $x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$ (при достаточно большом μ). В частности, на этом пути можно доказать следующую важную теорему: если заданы критическая точка функции f кратности μ , $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — достаточно общий набор голоморфных n -форм, $\delta_1(t), \dots, \delta_\mu(t)$ — непрерывно зависящий от t базис целочисленных гомологий, исчезающих в критической точке, то функция $\det^2 \left(\int_{\delta_j(t)} \omega_i / df \right)$ не равна тождественно нулю в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$, и, более того, порядок ее нуля в точке 0 равен $\mu(n-2)$ (см. теорему 12.1; ср. с леммой 4).

А. Теорема Фубини для осциллирующих интегралов. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $g: (\mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — функции, голоморфные в началах координат и имеющие в началах координат конечнократные критические точки. Рассмотрим функцию $f + g: (\mathbb{C}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Функция $f + g$ имеет в начале координат конечнократную критическую точку кратности, равной произведению кратностей критических точек функций f, g . Пусть ω — голоморфная n -форма, заданная в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$, η — голоморфная l -форма, заданная в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^l$. Мы сравним асимптотики трех интегралов $\int e^{\tau f} \omega$, $\int e^{\tau g} \eta$, $\int e^{\tau(f+g)} \omega \wedge \eta$, выбирая согласованным образом допустимые цепи интегрирования.

Пусть $\Gamma_1 \subset \mathbb{C}^n$, $\Gamma_2 \subset \mathbb{C}^l$ — допустимые цепи соответственно для критических точек функций f, g . Предположим, что $\text{Re } f|_{\partial \Gamma_1} = \text{Re } g|_{\partial \Gamma_2} = -a$, $a/2 > \text{Re } f|_{\Gamma_1}$, $\text{Re } g|_{\Gamma_2} \geq -a$ для достаточно малого числа $a > 0$ (выполнения этого условия можно добиться, заменяя цепи на эквивалентные). Тогда цепь $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subset \mathbb{C}^{n+l}$ допустима для

критической точки функции $f+g$. Легко видеть, что эта конструкция задает линейное отображение тензорного произведения групп классов эквивалентности цепей, допустимых для критических точек функций f, g , в группу классов эквивалентности цепей, допустимых для критической точки функции $f+g$. Можно показать (см. [215], а также теорему 2.9), что это отображение есть изоморфизм.

З а м е ч а н и е. В [215] приведено топологическое доказательство этого утверждения. Другое доказательство можно получить, используя теорему о детерминанте, сформулированную в начале п. 11.3 (см. п. 13.3.Д, а также следствие 1 леммы 6).

Т е о р е м а 4 (см. [185])

$$\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} e^{\tau(f+g)} \omega \wedge \eta = \int_{\Gamma_1} e^{\tau f} \omega \int_{\Gamma_2} e^{\tau g} \eta.$$

Теорема 4 — прямое следствие теоремы Фубини.

С л е д с т в и е. Асимптотический ряд левого интеграла равен произведению асимптотических рядов интегралов, стоящих в правой части.

В. Интегралы с фазой $f = x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$ (пример применения теоремы 4). Кратность критической точки функции $x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$ равна μ^n . Построим μ^n n -мерных цепей: $\Gamma_{j_1 \dots j_n}$ ($1 \leq j_1, \dots, j_n \leq \mu$), допустимых для этой критической точки.

Каждую из цепей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\mu \subset \mathbb{C}$, указанных в п. 11.1.В и допустимых для критической точки $x^{\mu+1}$, заменим на эквивалентную так, чтобы $x^{\mu+1}|_{\partial \Gamma_j} = -1$, $1/n > \operatorname{Re} x^{\mu+1}|_{\Gamma_j} \geq -1$. Положим цепь $\Gamma_{j_1, \dots, j_n} \subset \mathbb{C}^n$ равной $\Gamma_{j_1} \times \Gamma_{j_2} \times \dots \times \Gamma_{j_n}$. Легко видеть, что цепь $\Gamma_{j_1, \dots, j_n}$ допустима для критической точки $x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$.

Обозначим через ω_j , где $j = (j_1, \dots, j_n)$, форму $[x_1^{j_1-1} \dots x_n^{j_n-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n]$. Обозначим через J множество индексов $j = (j_1, \dots, j_n)$, для которых $1 \leq j_1, \dots, j_n \leq \mu$.

Л е м м а 6. 1. Для любых $j, l \in J$

$$\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f} \omega_l = \tau^{r_l} (\mu+1)^{-n} \prod_{k=1}^n \left(\varepsilon_{j_{k+1}}^{l_k} - \varepsilon_{j_k}^{l_k} \right) \Gamma \left(\frac{l_k}{\mu+1} \right),$$

где $r_l = -(l_1 + \dots + l_n)/(\mu+1)$; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu+1}$ — корни уравнения $x^{\mu+1} = -1$, указанные в п. 11.1.В, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

$$2. \quad \det \left(\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f} \omega_l \right) = (B_\mu)^{n\mu^n-1} \tau^{-n\mu^n/2},$$

где $j, l \in J$, B_μ — отличная от нуля константа, определенная в следствии леммы 4.

Лемма 6 — очевидное следствие теоремы 4 и лемм 3, 4.

Замечание. Интеграл с фазой $x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$ и произвольной формой ω интегрированием по частям сводится к линейной комбинации интегралов с той же фазой и формами ω_l , $l \in J$ (ср. с леммой 5).

Следствие 1. Цепи Γ_j , $j \in J$, порождают базис в группе классов эквивалентности цепей, допустимых для критической точки функции $x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$.

Действительно, эти цепи линейно независимы (п. 2 леммы 6), их число равно кратности критической точки.

Следствие 2.

$$\det^2 \left(\int_{\partial_t[\Gamma_j]} \omega_l / df \right) = C_\mu t^{\mu^n(n-2)},$$

где C_μ — отличная от нуля константа.

Следствие 2 с очевидностью вытекает из леммы 6 и формулы (6) на стр. 222.

Замечание 1. Легко видеть, что следствие 2 для критической точки $x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$ эквивалентно утверждению теоремы о детерминанте, сформулированной в начале п. 11.3.

Замечание 2. Лемма 6 и ее следствия легко обобщаются на случай критической точки функции $x_1^{a_1} + \dots + x_n^{a_n}$.

§ 12. Интегралы и дифференциальные уравнения

В этом параграфе доказывается, что многозначные функции, заданные интегралами голоморфной дифференциальной формы по классам непрерывных семейств гомологий, исчезающих в критической точке голоморфной функции, составляют все решения обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения, порядок которого не больше кратности критической точки. Анализ этого явления приводит к понятию связности Гаусса — Манина в расслоении исчезающих (ко)гомологий, ассоциированном с расслоением Милнора критической точки.

В первом пункте параграфа доказывается теорема о детерминанте, из которой, в частности, следует существование голоморфных дифференциальных n -форм в $\mathbb{C}^n$, которые после деления на дифференциал нашей функции порождают базис когомологий каждого слоя расслоения Милнора критической точки этой функции. Во втором пункте доказывается сформулированное выше утверждение о дифференциальном уравнении. В третьем пункте обсуждается понятие связности Гаусса — Манина.

Отметим введенное в п. 12.2 понятие особенности Пикара — Фукса конечнократной критической точки голоморфной функции, а также введенные в 12.3 понятия (ко)гомологического расслоения Милнора, ковариантного постоянного сечения (ко)гомологического расслоения, геометрического сечения когомологического расслоения

12.1. Теорема о детерминанте. В этом пункте доказана формулируемая ниже теорема 1; она является одним из основных утверждений об интегралах.

Рассмотрим росток $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции, имеющий критическую точку μ . Рассмотрим специализацию $f: X \rightarrow S$ ростка и соответствующее специализации расслоение Милнора (см. стр. 210). Выделим в слоях расслоения Милнора базисы целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий, непрерывно зависящие от точки базы. Базис в слое над точкой t обозначим $\delta_1(t), \dots, \delta_\mu(t)$. (Отметим, что базис — многозначная функция точки базы.) Рассмотрим произвольный набор из μ голоморфных дифференциальных n -форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, заданных в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что пространство X содержится в окрестности, в которой определены формы. Мы будем изучать свойства функции

$$\det^2: t \mapsto \det^2 \left(\int_{\delta_j(t)} \omega_l / df \right), \quad j, l = 1, \dots, \mu.$$

Теорема 1 (см. [22]). 1. Функция $\det^2$ однозначна в окрестности точки $t=0$.

2. Функция $\det^2$ имеет при $t=0$ нуль порядка, не меньшего чем $\mu(n-2)$ (в частности, при $n > 1$ функция $\det^2$ голоморфна при $t=0$).

3. Если набор форм достаточно общий (конечные струи форм в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ не удовлетворяют некоторому комплексно аналитическому соотношению), то порядок нуля при $t=0$ функции $\det^2$ равен $\mu(n-2)$.

Определение. Набор форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ назовем *тривиализацией*, если для какого-нибудь семейства базисов $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ (а, значит, и для любого) функция $\det^2$ не равна тождественно нулю.

Определение. Набор форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ назовем *базисной тривиализацией*, если для какого-нибудь семейства базисов $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ (а, значит, и для любого) функция $\det^2$ имеет при $t=0$ нуль порядка $\mu(n-2)$.

Следствие теоремы 1. Для любой конечнократной критической точки голоморфной функции существует тривиализация, более того, существует базисная тривиализация.

З а м е ч а н и я. 1. Первое доказательство существования тривиализации изложено в [14], оно опирается на теоремы (A), (B) А. Картана.

2. В п. 12.3 мы определим когомологическое расслоение Милнора критической точки. Это — векторное расслоение, база которого совпадает с базой обычного расслоения Милнора. Его слоями являются векторные пространства когомологий слоев обычного расслоения Милнора. Набор форм, названный в определении тривиализа-

цией, задает тривиализацию кохомологического расслоения Милнора над окрестностью точки $t=0$.

3. Понятие тривиализации не зависит от выбора специализации ростка (см. п. 10.3. А, замечание 3 в п. 10.3.Б).

4. В следствии 2 леммы 11.6 предъявлен набор форм, являющийся базисной тривиализацией для критической точки функции $x_1^N + \dots + x_n^N$. Теорема 1 выводится из существования базисной тривиализации для указанной критической точки. Доказательство теоремы см. в пп. 12.1.В, 12.1.Д. В пп. 12.1.А, 12.1.Б доказаны вспомогательные утверждения о функции $\det^2$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, сформулируем свойства тривиализаций.

I. Если $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — тривиализация, то формы Гельфанда — Лере $\omega_1/df, \dots, \omega_\mu/df$ порождают базисы $(n-1)$ -мерных кохомологий с комплексными коэффициентами во всех слоях расслоения Милнора критической точки 0 функции f , расположенных над достаточно малой окрестностью точки $t=0$.

II. Пусть $\omega, \omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n -формы, заданные в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$. Если $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — тривиализация, то на достаточно малой проколотой окрестности точки $t=0$ существуют и единственны голоморфные функции $p_1, \dots, p_\mu$, обладающие свойством:

$$\int_{\delta(t)} \omega/df \equiv \sum_j p_j(t) \int_{\delta(t)} \omega_j/df$$

для любого непрерывного семейства δ целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий в слоях расслоения Милнора критической точки 0 функции f . Если, более того, $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — базисная тривиализация, то функции $p_1, \dots, p_\mu$ голоморфно продолжаются в точку $t=0$.

Свойство I очевидно, докажем свойство II. Взяв в качестве семейства δ семейства $\delta_1, \dots, \delta_\mu$, порождающие базисы гомологий слоев расслоения Милнора, получим систему линейных уравнений на $p_1, \dots, p_\mu$. Ее определитель отличен от нуля по определению тривиализации. Решая систему уравнений по правилу Крамера, получим искомые функции в виде частных пар определителей. Каждое частное голоморфно при $t=0$, если $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — базисная тривиализация.

А. Элементарные свойства функции $\det^2$. Удобно рассматривать функцию $\det^2$ не на базе расслоения Милнора критической точки, а на базе расслоения Милнора версальной деформации критической точки.

Пусть $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — версальная деформация ростка f . Рассмотрим специализацию $G: X \rightarrow S$ развертки деформации и соответствующее расслоение Милнора $G: X' \rightarrow S'$ (обозначения и определения см. в п. 10.3.А на стр. 210; см. также

рис. 73 на стр. 210). Выделим в слоях расслоения Милнора базисы целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий, непрерывно зависящие от точек базы. Базис в слое над $s \in S'$ обозначим через $\delta_1(s), \dots, \delta_\mu(s)$. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n -формы на X . Пусть $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, представляющая росток F . Формы $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ на каждом слое расслоения Милнора определяют голоморфные дифференциальные $(n-1)$ -формы $\omega_1/d_x F, \dots, \omega_\mu/d_x F$ (формы $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ нужно ограничить на подпространства вида $\mathbb{C}^n \times y$ и разделить на $d_x F$). Рассмотрим на базе S' функцию

$$\det^2: s \mapsto \det^2 \left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l/d_x F \right), \quad j, l = 1, \dots, \mu.$$

Л е м м а 1. *Функция $\det^2$ однозначна и голоморфна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементы матрицы — многозначные голоморфные функции на базе (теорема 10.5). При аналитическом продолжении вдоль замкнутого пути значение функции $\det^2$ умножается на квадрат определителя оператора монодромии в гомологиях. Оператор монодромии невырожден и целочислен вместе с обратным. Поэтому квадрат его определителя равен 1. Следовательно, функция $\det^2$ однозначна.

З а м е ч а н и е. Если n четно, то уже функция $\det$ однозначна и голоморфна. Достаточно проверить однозначность при аналитическом продолжении вдоль малого пути вокруг неособой точки дискриминанта в базе версальной деформации. Определитель соответствующего преобразования монодромии равен определителю преобразования Пикара—Лефшеца, который при четном n равен 1.

Согласно определениям в п. 10.3.А база S' расслоения Милнора является дополнением к гиперповерхности в произведении шаров $S = B_\eta^1 \times B_\rho^k$. Разность $\Sigma = S \setminus S'$ называется *дискриминантом*.

Т е о р е м а 2 (см. [22]). *Функция $\det^2$ мероморфна в начале координат базы S и, более того, может быть представлена в виде gh^{n-2} , где g, h — функции на S , голоморфные в начале координат, причем h — это функция, нули которой определяют дискриминант (без кратностей).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На S заданы координаты: $y \in B_\rho^k$ — параметры деформации, $u \in B_\eta^1$ — значение функции F . При фиксированном y прямая значений пересекает дискриминант в μ точках (с учетом кратностей). Для общего значения координаты y прямая значений пересекает дискриминант в μ различных неособых точках. Достаточно доказать, что около таких неособых точек дискриминанта функция $\det^2/h^{n-2}$ голоморфна. Действительно, тогда по теореме о стирании особенностей функции $\det^2/h^{n-2}$ голоморфна на S всюду. Голоморфность в окрестности неособой точки дискриминанта следует из явных вычислений интегралов по

циклу, исчезающему в невырожденной критической точке (см. пример в п. 10.3 на стр. 216).

Итак, пусть $s_0 = (u_0, y_0)$ — неособая точка дискриминанта, в окрестности которой дискриминант является графиком функции $u = u(y)$. Функция $F(\cdot, y)$ имеет одну критическую точку в $X \cap (\mathbb{C}^n \times y)$ с критическим значением $u(y)$, и эта критическая точка невырождена. Рассмотрим оператор монодромии M , отвечающий обходу вокруг точки $(u(y), y)$ по малой окружности, расположенной на прямой значений. M — оператор Пикара — Лефшеца «отражения» в классе гомологий цикла, исчезающего при $s \rightarrow s_0$. Используя оператор монодромии, линейно над $\mathbb{R}$ заменим все базисы $\delta_1(s), \dots, \delta_\mu(s)$ одновременно для всех s из малой окрестности точки s_0 (от этого $\det^2$ умножится на число, равное квадрату определителя замены). Если n нечетно, то M имеет $(\mu - 1)$ -мерное подпространство инвариантных векторов и одномерное подпространство антиинвариантных векторов, порожденное классом цикла, исчезающего при $s \rightarrow s_0$. В качестве нового базиса возьмем $\delta_1(s), \dots, \delta_\mu(s)$, где $\delta_1(s)$ — это класс цикла, исчезающего при $s \rightarrow s_0$, $\delta_2(s), \dots, \delta_\mu(s)$ — любые классы, составляющие базис инвариантных классов. Если n четно, то все собственные числа оператора M равны 1, и подпространство инвариантных векторов $(\mu - 1)$ -мерно. В качестве нового базиса возьмем $\delta_1(s), \dots, \delta_\mu(s)$, где $\delta_1(s)$ — класс цикла, исчезающего при $s \rightarrow s_0$, $\delta_2(s)$ — любой класс гомологий, индекс пересечения которого с $\delta_1(s)$ равен 1, $\delta_3(s), \dots, \delta_\mu(s)$ — любые классы, составляющие вместе с $\delta_1(s)$ базис инвариантных классов.

Теперь теорема 2 следует из леммы 2.

Лемма 2. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма, заданная в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, содержащей пространство X . Если n нечетно, то в окрестности точки $s_0 \in \Sigma$ справедливы разложения

$$\int_{\delta_1(u, y)} \omega/d_x F = (u - u(y))^{n/2-1} P_1(u, y), \quad (1)$$

$$\int_{\delta_j(u, y)} \omega/d_x F = P_j(u, y), \quad j = 2, \dots, \mu, \quad (2)$$

где $P_1, \dots, P_\mu$ — функции, голоморфные в точке s_0 . Если n четно, то в окрестности точки $s_0 \in \Sigma$ справедливы разложение (1), разложение (2) при $j = 3, \dots, \mu$, а также разложение

$$\int_{\delta_2(u, y)} \omega/d_x F = \pm (u - u(y))^{n/2-1} \frac{\ln(u - u(y))}{2\pi i} P_1(u, y) + P_2(u, y), \quad (3)$$

где $P_1, \dots, P_\mu$ — функции, голоморфные в точке s_0 .

Доказательство леммы. Ограничение формы ω на подпространство вида $\mathbb{C}^n \times y$ замкнуто. По лемме Пуанкаре в окрест-

ности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ существует голоморфная $(n-1)$ -форма ψ , ограничение дифференциала которой на любое подпространство вида $\mathbb{C}^n \times y$ совпадает с ограничением формы ω . Согласно формуле (3) на стр. 209

$$\int_{\delta_j(u, y)} \omega/d_x F = \frac{\partial}{\partial u} \int_{\delta_j(u, y)} \psi. \quad (4)$$

Если цикл δ_j инвариантен относительно M , то в окрестности точки s_0 интеграл формы ψ по $\delta_j(u, y)$ однозначен и голоморфно зависит от $(u, y) \in S \setminus \Sigma$. Согласно теореме 10.7 этот интеграл имеет конечный предел при $u \rightarrow u(y)$ по прямой $y = \text{const}$. Следовательно, в окрестности точки s_0 он голоморфно продолжается на Σ . Следовательно, голоморфно продолжается на Σ и его производная (4). Лемма доказана при $j=3, 4, \dots, \mu$ и $j=2$ при n нечетном.

В окрестности невырожденной критической точки с критическим значением $u(y)$ функция $F(\cdot, y)$ голоморфной заменой переменных $x = x(z, y)$ приводится к виду $z_1^2 + \dots + z_n^2 + u(y)$. В этих координатах, воспользовавшись вычислениями примера в пункте 10.3.Г на стр. 216, получим

$$\int_{\delta_1(u, y)} \psi = (u - u(y))^{n/2} Q(u, y), \quad (5)$$

где Q — голоморфная функция. Это согласно (4) доказывает лемму при $j=1$.

Из формул Пикара — Лефшеца при n четном следует, что

$$\int_{\delta_2(u, y)} \psi = \pm \frac{\ln(u - u(y))}{2\pi i} \int_{\delta_1(u, y)} \psi + P(u, y), \quad (6)$$

где P — однозначная функция в окрестности точки s_0 ($\pm$ выбираются в зависимости от четности числа $n/2$). Аналогично предыдущему, P голоморфно продолжается на Σ . Следовательно, лемма справедлива при $j=2$ и n четном. Лемма 2 и теорема 2 доказаны.

Следствие 1 теоремы 2. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n -формы на X . Предположим, что ограничение функции

$$\det^2: s \mapsto \det^2 \left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l/d_x F \right), \quad j, l = 1, \dots, \mu,$$

на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка $\mu(n-2)$. Тогда функция $\det^2$ может быть представлена в виде $\det^2 = gh^{n-2}$, где g — голоморфная функция на S , отличная от нуля в точке

$s=0$, h —голоморфная функция на S , нули которой задают дискриминант (без кратностей). Более того, в этом случае формы $\omega_1/d_x F, \dots, \omega_\mu/d_x F$ порождают базисы $(n-1)$ -мерных когомологий во всех слоях расслоения Милнора версальной деформации, лежащих над точками базы, достаточно близкими к началу координат $s=0$.

Действительно, кратность пересечения прямой $y=0$ и дискриминанта в точке $s=0$ равна μ . Поэтому ограничение произвольной функции, задающей дискриминант без кратностей, на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка μ . Согласно теореме 2 частное функции $\det^2$ и $(n-2)$ -й степени функции, задающей дискриминант, обратимо в начале координат на S . Второе утверждение следствия очевидно.

З а м е ч а н и е. Существование набора форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, для которого ограничение функции $\det^2$ на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка $\mu(n-2)$, доказано в п.12.1.Д.

С л е д с т в и е 2 теоремы 2. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu, \omega$ —голоморфные дифференциальные n -формы на X . Предположим, что ограничение функции

$$\det^2: s \mapsto \det^2 \left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l/d_x F \right), \quad j, l=1, \dots, \mu,$$

на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка $\mu(n-2)$.

Тогда в окрестности начала координат на S существуют и единственны голоморфные функции $p_1, \dots, p_\mu$, обладающие свойством:

$$\int_{\delta(s)} \omega/d_x F = \sum_j p_j(s) \int_{\delta(s)} \omega_j/d_x F$$

для любого непрерывного семейства δ целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий в слоях расслоения Милнора версальной деформации.

См. доказательство следствия 2 теоремы 1.

Б. Каждый коэффициент разложения в ряд интеграла формы по классам семейства исчезающих гомологий зависит только от конечной струи формы и зависит от этой струи голоморфно. Точнее справедлива следующая лемма.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ —функция, голоморфная в начале координат и имеющая в начале координат конечнократную критическую точку. Пусть $\omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ —дифференциальная n -форма, голоморфная в начале координат. Пусть $\delta(t) \in H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$ —непрерывно зависящий от параметра класс гомо-

логий слоя X_t расслоения Милнора критической точки 0 функции f . Согласно теореме 10.8 в каждом секторе малой окрестности точки $t=0$ имеется разложение в ряд

$$\int_{\delta(t)} \omega/df = \sum_{k, \alpha} a_{k, \alpha} t^\alpha (\ln t)^k, \quad (7)$$

где числа α зависят только от f и не зависят от ω , δ .

Лемма 3. Для любых k, α коэффициент $a_{k, \alpha}$ зависит только от конечной струи функции g в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ и зависит от этой струи голоморфно.

Следствие. Каждый коэффициент ряда Лорана в точке $t=0$ функции $\det^2$, определенной в теореме 1, зависит только от конечных струй форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ и зависит от этих струй голоморфно.

Доказательство леммы. Обозначим через J_f идеал в $\mathbb{C}\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle\rangle$, порожденный функциями $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n$. Пусть N — натуральное число. Для доказательства первого утверждения леммы достаточно доказать, что при $g \in (J_f)^{2N}$ в ряде (7) все показатели α больше $N-1$. Здесь $(J_f)^{2N}$ — идеал, порожденный $2N$ -кратными произведениями элементов из J_f . Действительно, идеал J_f содержит некоторую степень максимального идеала (в силу конечнократности критической точки). Поэтому идеал $(J_f)^{2N}$ тоже содержит некоторую степень максимального идеала. Для любой функции g из этой степени максимального идеала все α в ряде (7) больше $N-1$.

Докажем, что для $g \in (J_f)^{2N}$ в ряде (7) все α больше $N-1$. Доказательство по индукции. При $N=0$ утверждение справедливо (теорема 10.8). Пусть $g = \sum h_j \partial f/\partial x_j$, где $h_j \in (J_f)^{2N-1}$. Тогда, согласно формуле (3) на стр. 209,

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta(t)} \omega/df = \int_{\delta(t)} \sum (-1)^{j+1} \partial h_j/\partial x_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n/df,$$

где $\partial h_j/\partial x_j \in (J_f)^{2N-2}$. По индуктивному предположению разложение в ряд интеграла в правой части начинается со степеней, больших чем $N-2$. Следовательно, ряд интеграла формы ω/df начинается со степеней, больших чем $N-1$.

Вторая часть леммы легко следует из очевидного утверждения: если задана мероморфная функция, голоморфно зависящая от параметров, то коэффициенты ее ряда Лорана голоморфно зависят от параметров (ср. с доказательством теоремы 10.2).

В. Начало доказательства теоремы 1. Первое и второе утверждения теоремы — следствия леммы 1 и теоремы 2. Согласно следствию леммы 3, для доказательства третьего утверждения теоремы 1 достаточно доказать существование хотя бы одного набора форм, для которого функция $\det^2$ имеет в начале координат

нуль порядка не большего чем $\mu(n-2)$. Доказательство существования выводится из следствия 2 леммы 11.6, см. п. 12.1.Д. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Г. Критическая точка кратности μ встречается в версальной деформации критической точки функции $x_1^N + \dots + x_n^N$ при $N \geq \mu + 2$. Точнее справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Пусть функция $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфна в начале координат и имеет в начале координат критическую точку кратности μ . Тогда для любого $N \geq \mu + 2$ существует многочлен

$$P(x_1, \dots, x_n, \delta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = Q(x_1, \dots, x_n, \delta) + \sum_{j=1}^n (1 + \varepsilon_j) x_j^N,$$

обладающий свойствами:

1. При фиксированных $\delta \neq 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ функция $P: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и функция f эквивалентны в окрестности точки 0.

2. $Q(x_1, \dots, x_n, 0) \equiv 0$.

3. Существуют сколь угодно малые по модулю $\delta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, при которых гиперповерхность $\{x \in \mathbb{C}^n \mid P(x, \delta, \varepsilon) = 0\}$ неособа вне начала координат.

Следствие. Рассмотрим версальную деформацию F ростка функции $x_1^N + \dots + x_n^N$ в начале координат. Обозначим через Λ росток множества всех значений параметров деформации, при которых F имеет единственную критическую точку с нулевым критическим значением, причем эквивалентную критической точке 0 функции f . Тогда при $N \geq \mu + 2$ Λ не пусто.

Следствие справедливо, поскольку деформация, указанная в лемме 4, может быть индуцирована из версальной деформации.

Доказательство леммы. В качестве Q возьмем многочлен $f_{N+1}(\delta x_1, \dots, \delta x_n)$, где $f_{N+1}(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен Тейлора степени $N+1$ функции f в начале координат. По теореме о конечной определенности (см. ОДО—I, § 6) функция в окрестности критической точки кратности μ эквивалентна своему многочлену Тейлора степени $\mu+1$. Поэтому справедлив п. 1 леммы. П. 2 доказывается аналогично лемме 6.1.

Д. Существует хотя бы один набор форм, для которого функция $\det^2$, определенная в теореме 1, имеет в начале координат нуль порядка не большего, чем $\mu(n-2)$. Такой набор предъявлен для критической точки вида $x_1^N + \dots + x_n^N$ в п. 11.3.В (см. следствие 2 леммы 11.6). Произвольная конечнократная критическая точка встречается в версальной деформации критической точки вида $x_1^N + \dots + x_n^N$. Поэтому слои расслоения Милнора произвольной критической точки вложены в слои расслоения Милнора версальной деформации суммы степеней. Это вложение индуцирует мономорфное вложение исчезающих гомологий. Формы набора, предъявленного для

суммы степеней, можно интегрировать по классам гомологий, исчезающих в исследуемой конечнократной критической точке. Мы докажем, что искомым набором форм для исследуемой критической точки может служить часть набора, предъявленного для суммы степеней. Теперь более подробно.

Пусть $N \geq \mu + 2$. Рассмотрим версальную деформацию $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ростка в начале координат функции $x_1^N + \dots + x_n^N$. Рассмотрим специализацию $G: X \rightarrow S$ развертки версальной деформации и соответствующее расслоение Милнора $G: X' \rightarrow S'$.

Обозначим через J множество мультииндексов $j = (j_1, \dots, j_n)$, где $1 \leq j_1, \dots, j_n \leq N$. Число этих мультииндексов равно числу Милнора μ' критической точки функции $x_1^N + \dots + x_n^N: \mu' = (N-1)^n$. Рассмотрим на X голоморфные дифференциальные n -формы ω_j , $j \in J$, где $\omega_j = x_1^{j_1-1} \dots x_n^{j_n-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Предположим, что в слоях расслоения Милнора $G: X' \rightarrow S'$ задан непрерывно зависящий от точки базы базис $\delta_1(s), \dots, \delta_{\mu'}(s)$ $(n-1)$ -мерных целочисленных гомологий, где $s \in S'$. Рассмотрим функцию на S' :

$$\det^2: s \mapsto \det^2 \left(\int_{\delta_l(s)} \omega_j / d_x F \right).$$

Согласно теореме 2 эта функция однозначна, голоморфна и является мероморфной функцией на $S = S' \cup \Sigma$. Согласно следствию 2 леммы 11.6 и следствию 1 теоремы 2 функция $\det^2$ может быть представлена в виде $\det^2 = gh^{n-2}$, где g — голоморфная функция на S , отличная от нуля в точке $s=0$, h — голоморфная функция на S , нули которой задают дискриминант (без кратностей).

Пространство S (база специализации) — это произведение шаров $B_\eta^1 \times B_\sigma^k$ (координаты на B_η^1 , B_σ^k обозначаются, соответственно, через u , y). Обозначим через Λ множество тех $y \in B_\sigma^k$, для которых функция $F(\cdot, y)$ имеет на $X \cap (\mathbb{C}^n \times y)$ единственную критическую точку с нулевым критическим значением, причем эквивалентную критической точке функции f (F — это представитель на X ростка F). Согласно лемме 4 Λ не пусто.

Пусть $y_0 \in \Lambda$. Обозначим через (x^0, y_0) критическую точку функции $F(\cdot, y_0)$ с нулевым критическим значением. Для фиксированного $\rho' > 0$ обозначим через $Y_{(u, y_0)}$ подмножество всех точек слоя $X_{(u, y_0)}$ специализации, удаленных от (x^0, y_0) на расстояние, меньшее чем ρ' , см. рис. 78; ср. с рис. 73 на стр. 210. Если число ρ' достаточно мало и число $\eta' > 0$ достаточно мало по сравнению с ρ' , то совокупность $\bigcup_u Y_{(u, y_0)}$, где $u \neq 0$, $|u| < \eta'$, вместе с естественной проекцией $Y_{(u, y_0)} \xrightarrow{u} (u, y_0)$ образует расслоение Милнора критической точки (x^0, y_0) функции $G(\cdot, y_0): \mathbb{C}^n \times y_0 \rightarrow \mathbb{C} \times y_0$. Слой $Y_{(u, y_0)}$ этого расслоения гомотопически эквивалентен букету μ $(n-1)$ -мерных сфер. Вложение $Y_{(u, y_0)} \hookrightarrow X_{(u, y_0)}$ индуцирует мономорфизм $(n-1)$ -мерных гомологий согласно теореме 2.1.

Над прямой $y = y_0$ в окрестности точки $(0, y_0)$ линейно над $\mathbb{R}$ изменим одновременно все базисы $\delta_1(s), \dots, \delta_{\mu'}(s)$ так, чтобы:

1) первые μ элементов базисов нового семейства исчезали при $(u, y_0) \mapsto (0, y_0)$ (т. е. являлись базисами $(n-1)$ -мерных гомологий слоев $Y_{(u, y_0)}$ расслоения Милнора критической точки (x^0, y_0) функции $G(\cdot, y_0)$);

2) последние $\mu' - \mu$ элементов базисов нового семейства принадлежали корневому подпространству с собственным числом 1 оператора монодромии, порожденного обходом вокруг $(0, y_0)$ по прямой $y = y_0$.

Такой базис существует, поскольку подпространство $H_{n-1}(Y_{(u, y_0)}) \subset H_{n-1}(X_{(u, y_0)})$ инвариантно относительно указанного оператора монодромии, и действие этого оператора монодромии на фактор-пространстве тривиально (действительно,

$$H_{n-1}(X_{(u, y_0)})/H_{n-1}(Y_{(u, y_0)}) \simeq H_{n-1}(X_{(0, y_0)}).$$

Рассмотрим ограничение функции $\det^2$ на прямую $y = y_0$. После изменения базиса функция $\det^2$ умножится на число, равное определителю замены базиса. Ограничение функции $\det^2$ имеет при $u = 0$ нуль порядка $\mu(n-2)$. Действительно, критическая точка (x^0, y_0) функции $F(\cdot, y_0)$ при малой деформации распадается на μ невырожденных критических точек и в каждой неособой точке дискриминанта функция $\det^2$ имеет нуль порядка $n-2$.

Наша задача состоит в доказательстве существования у матрицы $\left(\int_{\delta_l(u, y_0)} \omega_j / d_x F \right)$, $l, j \in J$, минора размера μ , расположенного в первых μ строках и имеющего при $u = 0$ нуль порядка не большего, чем $\mu(n-2)/2$ (в первых μ строках расположены интегралы по первым μ элементам базиса гомологий).

Существование такого минора следует из двух замечаний:

1) $\det = \sum_I \Delta^I \bar{\Delta}^I$, где $I \subset J$ — подмножество из μ элементов, Δ^I —

минор размера μ , расположенный в первых μ строках и в столбцах с номерами из I , $\bar{\Delta}^I$ — алгебраическое дополнение минора Δ^I .

2) Для любого I минор $\bar{\Delta}^I$ разлагается в ряд по степеням параметра u и степеням логарифма параметра u , причем в этом ряде все степени параметра неотрицательны.

Первое замечание — это теорема о разложении определителя по минорам из первых μ строк. Второе замечание следует из теоремы

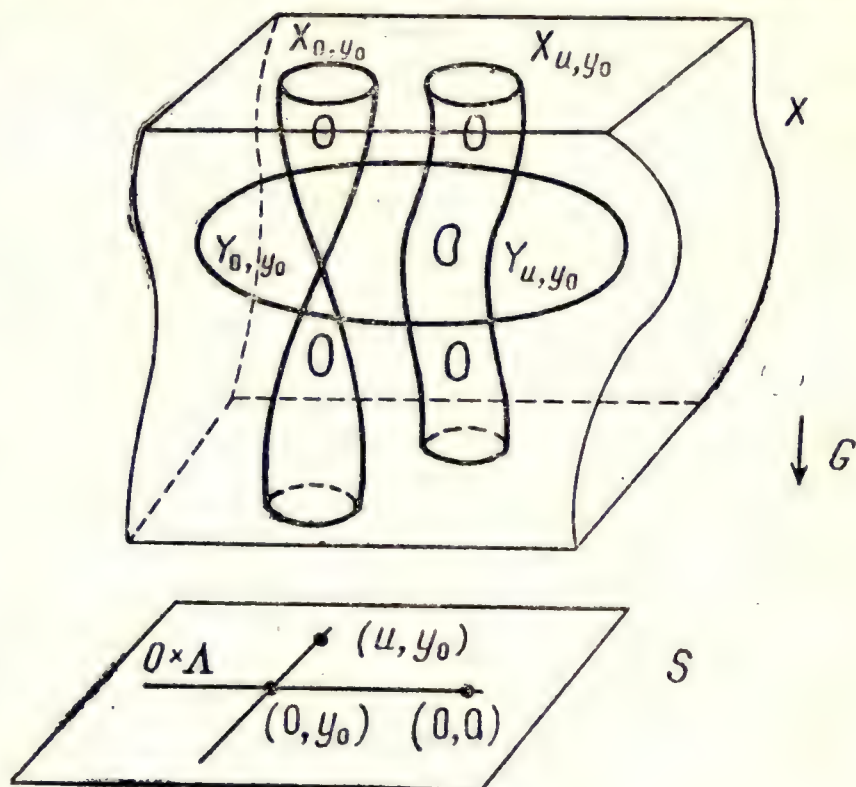


Рис. 78.

10.6 и формулы (3) на стр. 209 в силу выбора последних μ' — μ элементов базиса гомологий.

Т е о р е м а 1 доказана.

12.2. Интеграл — решение обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения с регулярной особой точкой.

А. Интегралы одной формы.

Теорема 3. Пусть функция $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфна в начале координат и имеет в начале координат конечнократную критическую точку. Пусть дифференциальная n -форма ω задана в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$ и голоморфна. Тогда в достаточно малой проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ существуют и единственны голоморфные функции $p_1, \dots, p_l$, для которых обыкновенное дифференциальное уравнение

$$I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \dots + p_l I = 0 \quad (8)$$

обладает свойством: все его решения составляют линейные комбинации многозначных голоморфных функций вида

$$I(t) = \int_{\delta(t)} \omega/df, \quad (9)$$

где δ — произвольное непрерывное семейство целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий в слоях расслоения Милнора критической точки 0 функции f .

О п р е д е л е н и е. Уравнение (8) называется уравнением Пикара—Фукса формы ω .

П р и м е р. Пусть f — квазиоднородный многочлен типа $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, веса 1. Пусть ω — квазиоднородная полиномиальная дифференциальная n -форма типа $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, веса r . Это означает, что относительно растяжений $g_\lambda: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, многочлен и форма обладают свойствами: $f \circ g_\lambda = \lambda f$, $g_\lambda^* \omega = \lambda^r \omega$. Предположим, что f имеет изолированную критическую точку в начале координат и что найдется хотя бы один класс гомологий, исчезающих в критической точке многочлена f , по которому интеграл формы ω отличен от нуля. Тогда $dI/dt = (r-1)I/t$ — уравнение Пикара—Фукса формы ω . В частности, при $f = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $dI/dt = (n/2 - 1)I/t$ — уравнение Пикара—Фукса формы $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Действительно, $g_\lambda^*(\omega/df) = \lambda^{r-1} \omega/df$. Растяжения g_λ индуцируют изоморфизм гомологий слоев расслоения Милнора. Поэтому все интегралы формы ω/df имеют вид $\text{const} \cdot t^{r-1}$.

З а м е ч а н и е. Можно показать (используя следствие 1 теоремы о детерминанте), что порядок уравнения Пикара—Фукса достаточно общей формы равен кратности критической точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть $\delta_1(t), \dots, \delta_\mu(t)$ — непрерывно зависящий от t базис целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий в слое расслоения Милнора критической точки функции f . Рассмотрим многозначную вектор-функцию $I(t) =$

$= \left(\int_{\delta_1(f)} \omega/df, \dots, \int_{\delta_\mu(f)} \omega/df \right)$. Для любого натурального k обозначим через $L_k(t) \subset \mathbb{C}^\mu$ подпространство, порожденное векторами $I(t), I^{(1)}(t), \dots, I^{(k)}(t)$. Подпространство $L_k(t)$ зависит от выбора аргумента числа t . Однако его размерность не зависит от выбора аргумента числа t (при изменении аргумента все векторы умножаются на оператор монодромии). Для всех t с достаточно малым модулем размерности подпространств $L_k(t)$ равны. Действительно, размерность подпространства — это размер максимального отличного от нуля минора матрицы, составленной из координат векторов, порождающих подпространство. Согласно теореме 10.8 миноры матрицы, составленной из координат векторов $I, \dots, I^{(k)}$, разлагаются в ряды в окрестности точки $t=0$. Поэтому, если минор не равен нулю тождественно, то он не обращается в нуль в достаточно малой проколотой окрестности точки $t=0$. Пусть теперь l — наименьшее целое число, для которого вектор $I^{(l)}(t)$ является линейной комбинацией векторов $I(t), I^{(1)}(t), \dots, I^{(l-1)}(t)$ (для всех малых t с достаточно малым модулем). Имеем

$$I^{(l)}(t) + p_1(t) I^{(l-1)}(t) + \dots + p_l(t) I(t) = 0, \quad (10)$$

где $p_1, \dots, p_l$ — голоморфные функции в проколотой окрестности нуля. Эти функции однозначны, поскольку при изменении аргумента числа t функция I и все ее производные умножаются на оператор монодромии. По построению каждая координата вектор-функции I является решением уравнения (10), линейные комбинации координат порождают l -мерное пространство решений. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Порядок дифференциального уравнения (8) не больше кратности критической точки 0 функции f .*

О п р е д е л е н и е. Пусть $I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \dots + p_l I = 0$ — дифференциальное уравнение, коэффициенты которого определены в проколотой окрестности точки $t=0$ и голоморфны. Точка $t=0$ называется *особой точкой* уравнения, если хотя бы один из коэффициентов не продолжается голоморфно в точку $t=0$. Точка $t=0$ называется *регулярной особой точкой*, если точка $t=0$ особая и коэффициенты уравнения представимы в виде $p_j = P_j/t^j$, $j=1, \dots, l$, где функции $P_1, \dots, P_l$ голоморфны в $t=0$.

П р и м е р. Пусть f, ω — те же, что и в предыдущем примере. Уравнение Пикара—Фукса формы ω имеет при $t=0$ неособую точку, если $r=1$, и регулярную особую точку, если $r \neq 1$.

Т е о р е м а 4 (см. [65]). *Для того чтобы особая точка $t=0$ была регулярной особой точкой дифференциального уравнения $I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \dots + p_l I = 0$, необходимо и достаточно, чтобы произвольное решение уравнения в произвольном секторе $a < \arg t < b$ при $t \rightarrow 0$ росло не быстрее, чем степенным образом: $I(t) = o(t^{-N})$ для некоторого N .*

С л е д с т в и е. Для уравнения Пикара — Фукса голоморфной дифференциальной формы (см. (8)) точка $t=0$ либо неособая, либо регулярная особая.

Действительно, см. теорему 10.7.

Идея доказательства достаточности. Индукция по l .

При $l=1$ теорема справедлива, поскольку $I = \text{const } e^{-\int p_1 dt}$. Пусть достаточность доказана для $l=m$, докажем достаточность для $l=m+1$. Во-первых, исходное уравнение имеет решение вида $I_0(t) = t^\alpha \varphi(t)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, φ — функция, голоморфная при $t=0$. Действительно, если $I_1, \dots, I_{m+1}$ — фундаментальная система решений, то в качестве I_0 можно взять собственный вектор $\sum c_j I_j$ преобразования монодромии решений (α и собственное число λ связаны соотношением $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$). Во-вторых, для любого j $t^j I_0^{(j)} / I_0$ — голоморфная функция. В-третьих, замена $I = I_0 \int J dt$ сводит уравнение к линейному однородному уравнению порядка m . Коэффициенты нового уравнения явно вычисляются через коэффициенты исходного уравнения и выражения вида $I_0^{(j)} / I_0$. По предположению индукции, новое уравнение имеет регулярную особую точку. Возвращаясь к исходному уравнению и используя явные формулы для коэффициентов, получаем регулярность его особой точки.

Идея доказательства необходимости. Уравнение заменой $y_1 = I$, $y_2 = tI^{(1)}$, $\dots$, $y_l = t^{l-1}I^{(l-1)}$ сводится к системе линейных однородных уравнений первого порядка: $dy/dt = Ay$, в которой матрица A имеет при $t=0$ полюс первого порядка. Теперь необходимость следует из обсуждаемой ниже теоремы 6.

Уравнение Пикара — Фукса описывает интегралы одной формы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую интегралы форм, порождающих базис в исчезающих когомологиях. Такая система содержит информацию не только о формах, но и о критической точке функции.

Б. Интегралы форм, порождающих базис в исчезающих когомологиях. Пусть функция $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфна в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ и имеет в ней критическую точку кратности μ . Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n -формы, заданные в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$ и составляющие тривиализацию для критической точки 0 функции f (см. стр. 230).

Т е о р е м а 5. В достаточно малой проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ существует и единственна $\mu \times \mu$ -матрица A голоморфных функций, для которой система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum_{k=1}^{\mu} A_k^j I^k, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (11)$$

обладает свойством: все решения системы составляют линейные комбинации вектор-функций вида

$$I(t) = \left(\int_{\delta(t)} \omega_1/df, \dots, \int_{\delta(t)} \omega_\mu/df \right), \quad (12)$$

где δ — произвольное непрерывное семейство целочисленных $(n-1)$ -мерных гомологий в слоях расслоения Милнора критической точки 0 функции f .

Определение. Система (11) называется *уравнением Пикара — Фукса тривиализации* $\omega_1, \dots, \omega_\mu$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание. Коэффициенты матрицы A мероморфны в точке $t=0$ в силу теоремы 10.8.

Пример уравнения Пикара — Фукса тривиализации. Пусть $f = x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}$. Пусть $\omega_j, j \in J$, — набор форм, определенных перед леммой 11.6 на стр. 228. Эти формы составляют тривиализацию для критической точки функции f (следствие 2 леммы 11.6). Уравнением Пикара — Фукса этой тривиализации является система

$$\frac{dI^j}{dt} = ((j_1 + \dots + j_n)/(\mu + 1) - 1) I^j/t, \quad j \in J.$$

В. Решетка в пространстве решений. В линейном пространстве решений уравнения Пикара — Фукса тривиализации выделена μ -мерная целочисленная решетка: решение принадлежит этой решетке, если оно имеет вид (12), т. е. если его координаты — это интегралы по классам непрерывного семейства целочисленных гомологий. Эта решетка обладает двумя свойствами:

1. Базис над $\mathbb{Z}$ решетки является базисом над $\mathbb{C}$ μ -мерного комплексного пространства всех решений системы.

2. Рассмотрим оператор монодромии решений, т. е. линейный оператор в пространстве решений, порожденный аналитическим продолжением решений вдоль пути, обходящего точку $t=0$ один раз «против часовой стрелки». Тогда как сам оператор монодромии, так и обратный к нему сохраняют решетку.

Обозначим через V пространство решений, через $V_{\mathbb{Z}}$ — решетку, через M — оператор монодромии. Тогда свойства 1, 2 записываются в виде:

$$V = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}, \quad M(V_{\mathbb{Z}}) = M^{-1}(V_{\mathbb{Z}}) = V_{\mathbb{Z}}.$$

Свойство 1 соответствует утверждению: естественный образ группы $H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$ в $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ образует μ -мерную целочисленную решетку, базис которой над $\mathbb{Z}$ является базисом над $\mathbb{C}$ в $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ (здесь X_t — слой расслоения Милнора критической точки 0 функции f). Свойство 2 соответствует утверждению: опе-

ратор монодромии, действующий на $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$, сохраняет образ группы $H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$.

Определим вещественное подпространство в пространстве решений как вещественное векторное пространство, порожденное решеткой: $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Пространство V всех решений системы является комплексификацией вещественного подпространства: $V = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$, $i^2 = -1$. Это разложение определяет в V операцию комплексного сопряжения.

З а м е ч а н и е. Сопоставление асимптотик решений и операции комплексного сопряжения приводит к понятию смешанной структуры Ходжа критической точки голоморфной функции (см. ниже §§ 13, 14).

Структура, аналогичная решетке, имеется в пространстве решений уравнения Пикара — Фукса голоморфной дифференциальной n -формы (см. (8)). А именно, в линейном пространстве его решений выделен модуль над $\mathbb{Z}$ с μ образующими: решение принадлежит модулю, если оно имеет вид (9). И в этом случае оператор монодромии и обратный к нему сохраняют модуль.

Г. Изменение системы уравнений при изменении тривиализации. Выясним, что происходит с системой уравнений (11) при изменении тривиализации. Пусть $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ — новая тривиализация. Положим

$$I_l'^j(t) = \int_{\delta_l(t)} \omega_j'/dt, \quad j, l = 1, \dots, \mu.$$

По определению тривиализации для любого t из достаточно малой проколотой окрестности точки $t=0$ существует и единственная обратимая $\mu \times \mu$ -матрица $Q(t)$, для которой

$$I^j(t) = \sum_r Q_r^j(t) I'^r(t), \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Коэффициенты матрицы Q (как ранее коэффициенты матрицы A) — однозначные голоморфные функции, определенные в проколотой окрестности точки $t=0$. Коэффициенты матрицы Q мероморфны при $t=0$ в силу теоремы 10.8. Новая система уравнений имеет вид

$$\frac{dI'}{dt} = \left(-Q^{-1} \frac{dQ}{dt} + Q^{-1} A Q \right) I'.$$

Решения старой системы связаны с решениями новой системы мероморфным преобразованием

$$I = Q I'. \quad (13)$$

Это преобразование переводит решетку в пространстве решений новой системы в решетку в пространстве решений старой системы. Операторы монодромии в пространствах решений перестановочны с этим преобразованием.

Лемма 5. Если формы $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ составляют базисную тривиализацию (см. стр. 230), то коэффициенты матрицы Q голоморфны при $t=0$.

Доказательство. См. свойство II тривиализаций на стр. 231.

Следствие. Если и формы $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, и формы $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ составляют базисные тривиализации, то коэффициенты матрицы Q голоморфны при $t=0$ и матрица $Q(0)$ обратима.

Таким образом, уравнения Пикара — Фукса двух базисных тривиализаций переводятся друг в друга голоморфным обратимым преобразованием (13) искомым функций. Это преобразование сохраняет решетки в пространствах решений этих уравнений.

Докажем, что, обратно, всякая голоморфная обратимая при $t=0$ замена неизвестных функций в уравнении Пикара — Фукса базисной тривиализации может быть индуцирована переходом к новой базисной тривиализации.

Лемма 6. Пусть формы $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ составляют базисную тривиализацию (см. стр. 230). Пусть Q — обратимая $\mu \times \mu$ -матрица голоморфных функций, заданных на окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$. Тогда существуют формы $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, которые составляют базисную тривиализацию и для которых переход (13) от уравнения Пикара — Фукса тривиализации $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ к уравнению Пикара — Фукса тривиализации $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ задается матрицей Q .

Доказательство. В качестве искомым форм можно взять формы $\omega_j = \sum_r Q(f)^j_r \omega'_r$, $j=1, \dots, \mu$, где $Q(f)$ — матричная функция в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$, индуцированная из матричной функции Q отображением $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Д. Определение особенности Пикара — Фукса конечнократной критической точки. Пусть A — $\mu \times \mu$ -матрица голоморфных функций, заданных в проколоте окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum_{k=1}^{\mu} A^j_k I^k, \quad j=1, \dots, \mu. \quad (14)$$

Предположим, что в μ -мерном пространстве решений этой системы выделена μ -мерная целочисленная решетка, базис которой является базисом на $\mathbb{C}$ всего пространства решений (т. е. если V — пространство решений, $V_{\mathbb{Z}} \subset V$ — решетка, то $V = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$). Рассмотрим оператор M монодромии решений (т. е. линейный оператор в пространстве решений, порожденный аналитическим продолжением решений вдоль пути, обходящего точку $t=0$ один раз «против часовой стрелки»). Предположим, что оператор монодромии и обратный к нему сохраняют решетку (т. е. $M(V_{\mathbb{Z}}) = M^{-1}(V_{\mathbb{Z}}) = V_{\mathbb{Z}}$). В этом случае систему (14) назовем оснащенной, решетку в пространстве решений назовем оснащением системы.

Примеры оснащенных систем доставляют уравнения Пикара — Фукса тривиализаций (см. (11)), оснащения этих систем задают решения вида (12).

З а м е ч а н и е. Система дифференциальных уравнений может быть оснащена тогда и только тогда, когда в пространстве ее решений существует базис, в котором оператор монодромии и обратный к нему целочисленны.

Рассмотрим две оснащенные системы из μ уравнений. Их матрицы, пространства решений, оснащения обозначим, соответственно, через $A, V, V_{\mathbb{Z}}, A', V', V'_{\mathbb{Z}}$. Эти системы назовем *эквивалентными*, если в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ существует обратимая $\mu \times \mu$ -матрица Q голоморфных функций, для которой замена неизвестных функций $I^j(t) = \sum_r Q_r^j(t) I'^r(t)$, $j = 1, \dots, \mu$, переводит первую систему

во вторую, при этом сохраняя оснащения, т. е. $A' = -Q^{-1} \frac{dQ}{dt} + Q^{-1}AQ$, $V_{\mathbb{Z}} = QV'_{\mathbb{Z}}$. Класс эквивалентности системы назовем *особенностью* оснащенной системы дифференциальных уравнений.

Согласно леммам 5, 6 уравнения Пикара — Фукса базисных тривиализаций составляют в точности один класс эквивалентности. Этот класс эквивалентности назовем *особенностью Пикара — Фукса критической точки* 0 голоморфной функции f .

П р о б л е м а. *Описать особенность Пикара — Фукса критической точки.*

Например, указать нормальную форму особенности. Указать, какие особенности оснащенных систем могут быть особенностями Пикара — Фукса критических точек.

Разумные вопросы об особенностях Пикара — Фукса критических точек, вероятно, имеют разумные ответы. Например, особенность Пикара — Фукса имеет диагонального представителя (т. е. представителя вида $dI^j/dt = a_j(t)I^j$, $j = 1, \dots, \mu$) тогда и только тогда, когда критическая точка голоморфно эквивалентна критической точке квазиоднородной функции. (Доказательство: особенность Пикара — Фукса критической точки квазиоднородной функции имеет диагонального представителя согласно [219], или [185, пример (6.7)], обратное утверждение несложно выводится из [208] (ср. с [21]).)

Г и п о т е з а. *Особенности Пикара — Фукса конечнократных критических точек разные у голоморфно неэквивалентных критических точек, по крайней мере у близких.*

Эта гипотеза является аналогом теоремы Торелли в алгебраической геометрии (см. [157], [121]).

В качестве обстоятельства, стимулирующего изучение проблемы и подкрепляющего гипотезу, отметим, что особенность Пикара — Фукса критической точки определяет структуру Ходжа критической точки, см. далее п. 13.2.

Е. Уравнение Пикара — Фукса тривиализации имеет регулярную особую точку. Напомним классическую теорему из теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Теорема 6 (см. [65]). Пусть A — $\mu \times \mu$ -матрица голоморфных функций в проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим систему из μ линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dI}{dt} = AI, \quad I(t) \in \mathbb{C}^\mu. \quad (15)$$

Тогда следующие свойства системы уравнений эквивалентны.

1. Пусть $I = (I^1, \dots, I^\mu)$ — произвольное решение системы уравнений. Тогда в произвольном секторе $a < \arg t < b$ при $t \rightarrow 0$ каждая координата решения растет не быстрее, чем степенным образом: $I^j(t) = o(t^{-N})$ для некоторого N .

2. Существует обратимая $\mu \times \mu$ -матрица Q голоморфных функций в проколотой окрестности точки $t=0$, мероморфных в точке $t=0$, для которой подстановка $I = QI'$ преобразует исходную систему уравнений в систему уравнений с простым полюсом в точке $t=0$, т. е. матричная функция $Q^{-1}AQ - Q^{-1}dQ/dt$ имеет в точке $t=0$ полюс порядка не выше первого.

О п р е д е л е н и е. Точка $t=0$ называется особой точкой системы уравнений (15), если хотя бы одна из координат матрицы A не продолжается голоморфно в точку $t=0$. Особая точка системы уравнений (15) называется регулярной, если система обладает свойствами 1, 2, указанными в теореме 6.

Уравнение Пикара — Фукса тривиализации имеет в точке $t=0$ регулярную особую точку или неособую точку согласно теореме 10.7.

З а м е ч а н и е. Точка $t=0$ является неособой точкой уравнения Пикара — Фукса тривиализации тогда и только тогда, когда критическая точка 0 функции f невырождена, число переменных функции равно двум, тривиализация является базисной. (Доказательство легко выводится из теоремы 10.8 и теоремы 4.6.)

Идея доказательства теоремы 6. $1 \Rightarrow 2$. Пусть M — преобразование монодромии решений, порожденное обходом вокруг $t=0$ «против часовой стрелки». Пусть $\ln M$ — одно из возможных значений логарифма матрицы M . Пусть B — матрица фундаментальной системы решений уравнения (15). Тогда $P = B \exp(-\ln t \times \ln M / 2\pi i)$ — матрица мероморфных функций. Замена $I = PI'$ приводит уравнение к виду

$$\frac{dI'}{dt} = -\frac{\ln M}{2\pi i t} I'. \quad (16)$$

З а м е ч а н и я. 1. $\exp(-\ln t \ln M / (2\pi i))$ — матрица фундаментальной системы решений уравнения (16). Поэтому решения урав-

нения (15) разлагаются в ряды вида $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$ (при наличии свойства, указанного в п. 1 теоремы); ср. с доказательством теоремы 10.2.

2. Произвольная система уравнений (15) заменой переменных $I = PI'$ приводится к виду (16). Однако P не всегда будет мероморфной матрицей.

$2 \Rightarrow 1$. Поскольку A имеет полюс первого порядка, $\frac{d\|B\|}{dr} \leq \leq \frac{\text{const}}{r} \|B\|$, где $r = |t|$. Поэтому $\|B\| < B_0 r^{-\text{const}}$. Подробнее см. в [97].

12.3. Связность Гаусса — Манина. В этом пункте обсуждается геометрическая интерпретация систем дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют интегралы голоморфных форм по классам непрерывных семейств целочисленных исчезающих гомотопий.

С произвольным локально тривиальным расслоением π ассоциировано комплексное векторное расслоение k -мерных (ко)гомотопий его слоев. В этом векторном расслоении определена естественная операция переноса слоев над кривыми в базе (поскольку (ко)гомотопии близких слоев исходного расслоения канонически изоморфны). Операция переноса называется *связностью Гаусса — Манина* в расслоении (ко)гомотопий.

Многозначным *ковариантно постоянным* сечением расслоения (ко)гомотопий называется многозначное сечение (т. е. сечение расслоения (ко)гомотопий, поднятого на универсальную накрывающую базы), значения которого инвариантны относительно операции переноса. Ковариантно постоянные сечения составляют первый важный класс сечений расслоения (ко)гомотопий.

Предположим теперь, что расслоение π — комплексно-аналитическое. Рассмотрим на пространстве расслоения голоморфную дифференциальную k -форму, ограничения которой на слои замкнуты. Форма определяет (однозначное) сечение расслоения k -мерных когомотопий: точке базы относится класс когомотопий ограничения формы на слой, лежащий над точкой. Полученные таким геометрическим образом сечения образуют второй важный класс сечений расслоения когомотопий (класс *геометрических сечений*, точное определение см. в п. 12.3.Б). Расслоения k -мерных гомотопий и k -мерных когомотопий естественным образом сопряжены. Имея ковариантно постоянное сечение расслоения k -мерных гомотопий и геометрическое сечение расслоения k -мерных когомотопий и вычисляя поточечно значения одного сечения на значениях другого, получим многозначную функцию на базе. Значения этой функции — не что иное, как интегралы формы, задающей геометрическое сечение, по циклам, представляющим в слоях гомотопии, являющиеся значениями ковариантно постоянного сечения. Такие функции на базе расслоения Милнора рассматривались в § 10.

Предположим, что задан базис геометрических сечений и известно, как переносить когомологии в координатах, задаваемых этим базисом. Предположим, что мы хотим найти координаты ковариантно постоянных сечений. Тогда для их нахождения необходимо решить систему дифференциальных уравнений первого порядка. Эта система дифференциальных уравнений для случая расслоения Милнора критической точки сопряжена с уравнением Пикара — Фукса тривиализации, задаваемой набором форм, определяющих базис геометрических сечений (см. п. 12.2). Теперь обсудим эти факты подробнее.

А. Расслоение (ко)гомологий, ассоциированное с локально тривиальным расслоением. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение (не обязательно векторное). Для любого $k \geq 0$ определим комплексные векторные расслоения k -мерных гомологий и k -мерных когомологий слоев расслоения π . Положим $H_k = \bigcup_{b \in B} H_k(X_b, \mathbb{C})$. Обозначим через π_* естественную проекцию $H_k \rightarrow B$.

Пусть $U \subset B$ — стягиваемое открытое подмножество. Тогда $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфно прямому произведению слоя и множества U . Естественное вложение произвольного слоя над U в $\pi^{-1}(U)$ индуцирует изоморфизм (ко)гомологий. Таким образом, определены тривиализации проекции π_* над открытыми стягиваемыми подмножествами базы B . Построенные тривиализации определяют на $\pi_*: H_k \rightarrow B$ структуру комплексного векторного расслоения. Это расслоение называется *расслоением k -мерных гомологий, ассоциированным с π* .

Аналогично определяется *расслоение k -мерных когомологий, ассоциированное с расслоением π* . Расслоения k -мерных гомологий и k -мерных когомологий естественным образом сопряжены (поскольку сопряжены k -мерные гомологии и k -мерные когомологии).

З а м е ч а н и е. Функции перехода построенных тривиализаций локально постоянны.

В расслоении (ко)гомологий определена естественная операция параллельного переноса слоев над кривыми в базе. (Если задана кривая в базе, то индуцированное ею из π расслоение над отрезком тривиально, поэтому канонически изоморфны (ко)гомологии слоев над начальной и конечной точками кривой.) Операция параллельного переноса обладает следующими свойствами:

1. Отображение слоя над начальной точкой пути в слой над конечной точкой пути — линейный изоморфизм.

2. Отображение не зависит от выбора кривой в классе гомотопных кривых с закрепленными концами.

Операция переноса (ко)гомологий называется *связностью Гаусса — Манина* в расслоении (ко)гомологий.

Операции переноса в расслоении гомологий и расслоении когомологий согласованы — перенос перестановочен с сопряжением.

Сечение расслоения (ко)гомологий над открытым подмножеством базы называется *ковариантно постоянным*, если его значения инвариантны относительно параллельных переносов вдоль любых кривых, лежащих в этом открытом множестве.

Если база B локально односвязна (например, многообразие), то любой вектор произвольного слоя расслоения (ко)гомологий можно, и притом единственным образом, распространить до ковариантно постоянного сечения над достаточно малой окрестностью его проекции в базу (для этого вектор надо параллельно перенести в близкие слои). Дальнейшее распространение этого ковариантно постоянного сечения приводит к многозначному ковариантно постоянному сечению над всей базой, т. е. к ковариантно постоянному сечению расслоения (ко)гомологий, поднятого на универсальную накрывающую базы.

В каждом слое расслоения (ко)гомологий имеются дополнительные структуры: вещественное подпространство и в нем целочисленная решетка. Вещественное подпространство — это естественный образ в (ко)гомологиях слоя расслоения π с комплексными коэффициентами (ко)гомологий с вещественными коэффициентами; целочисленная решетка в вещественном подпространстве — это естественный образ группы (ко)гомологий слоя с целыми коэффициентами. Слой расслоения (ко)гомологий является комплексификацией своего вещественного подпространства, решетка порождает вещественное подпространство (с помощью сложения и умножения на вещественные числа). Вещественное подпространство и целочисленная решетка инвариантны относительно параллельных переносов.

Предположим, что база расслоения π — голоморфное многообразие. Тогда расслоение (ко)гомологий, ассоциированное с π , обладает канонической структурой голоморфного векторного расслоения. Действительно, определим голоморфные сечения расслоения (ко)гомологий как сечения, имеющие голоморфные координаты в произвольном репере расслоения (ко)гомологий, составленном из ковариантно постоянных сечений. Это определение корректно, поскольку функции перехода между реперами, составленными из ковариантно постоянных сечений, локально постоянны.

З а м е ч а н и е. О связности Гаусса — Манина см. в [243, 244, 199].

Б. (Ко)гомологическое расслоение Милнора деформации. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий критическую точку конечной кратности μ . Пусть $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — деформация ростка. Пусть $G: X \rightarrow S$ — специализация деформации и $G: X' \rightarrow S'$ — соответствующее расслоение Милнора (см. стр. 210). Расслоение $(n-1)$ -мерных (ко)гомологий, ассоциированное с расслоением Милнора, называется (ко)гомологическим расслоением Милнора деформации (точнее, специализации деформации). (Ко)гомологическое расслоение Милнора обладает канонической структурой голоморфного

векторного расслоения. В (ко)гомологическом расслоении Милнора задана связность Гаусса—Манина.

З а м е ч а н и е. Слой расслоения Милнора имеет гомотопический тип букета $(n-1)$ -мерных сфер. Поэтому ассоциированное расслоение k -мерных (ко)гомологий содержитательно только при $k = n-1$.

Определим класс геометрических сечений когомологического расслоения Милнора. Пусть ω —голоморфная дифференциальная n -форма на X . Для любой точки $b \in S'$ ограничение формы Гельфанда—Лере на слой X_b расслоения Милнора определяет класс когомологий $[\omega/d_x F|_{X_b}] \in H^{n-1}(X_b, \mathbb{C})$. Сечение $b \mapsto [\omega/d_x F|_{X_b}]$ когомологического расслоения Милнора называется *геометрическим сечением* формы ω и обозначается через $s[\omega]$.

Пусть δ —многозначное ковариантно постоянное сечение гоомологического расслоения Милнора. Рассмотрим на S' многозначную функцию $\langle s[\omega], \delta \rangle$. Согласно нашим определениям $\langle s[\omega], \delta \rangle = \int_{\delta} \omega/d_x F$. Такие функции рассматривались в § 10.

Функция $\langle s[\omega], \delta \rangle$ голоморфна согласно теореме 10.5. Поэтому геометрическое сечение голоморфной дифференциальной n -формы является голоморфным сечением когомологического расслоения Милнора.

Совокупность геометрических сечений—модуль над кольцом голоморфных функций на базе S специализации деформации: если $s[\omega]$ —геометрическое сечение, g —голоморфная функция на S , то сечение $gs[\omega]$ является геометрическим сечением формы $s[(g \circ G) \cdot \omega]$.

Согласно теоремам 1, 2 существует набор из μ геометрических сечений, значения которых порождают базисы во всех слоях когомологического расслоения Милнора, лежащих над точками базы, достаточно близкими к началу координат $0 \in S$.

З а м е ч а н и е. Модуль ростков геометрических сечений в начале координат базы S версальной деформации критической точки ростка $\mathbf{f}$ является свободным модулем ранга μ над кольцом ростков голоморфных функций в начале координат базы S . Это нетрудно показать, пользуясь следствиями теоремы 2 и утверждением п. 12.1.Д (см. далее случай тривиальной деформации ростка). Базис модуля задают геометрические сечения форм, для которых ограничение функции $\det^2$ на ось значений, проходящую через начало координат, имеет в начале координат нуль минимальной кратности; см. следствия теоремы 2.

В. Связность Гаусса—Манина и уравнение Пикара—Фукса тривиализации. Ограничимся далее случаем тривиальной деформации ростка $\mathbf{f}$. Рассмотрим специализацию $f: X \rightarrow S$ ростка и соответствующее расслоение Милнора $f: X' \rightarrow S'$. Пусть $s_1, \dots, s_\mu$ —базис над S' голоморфных сечений (ко)гомологического расслоения Милнора.

Лемма 7. На S' существует и единственна $\mu \times \mu$ -матрица B голоморфных функций, для которой система дифференциальных уравнений

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum_k B_k^j I^k, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (17)$$

обладает свойством: сечение $\sum I^j s_j$ ковариантно постоянно в связности Гаусса—Манина тогда и только тогда, когда $(I^1, \dots, I^\mu)$ — решение системы.

Система дифференциальных уравнений (17) называется уравнением ковариантно постоянных сечений в репере $s_1, \dots, s_\mu$.

Доказательство. Множество многозначных ковариантно постоянных сечений (ко)гомологического расслоения Милнора образует μ -мерное комплексное векторное пространство. Разлагая ковариантно постоянные сечения по базису $s_1, \dots, s_\mu$, получим μ -мерное комплексное векторное пространство голоморфных вектор-функций $(I^1, \dots, I^\mu)$, инвариантное относительно аналитического продолжения вектор-функций вокруг точки 0. Существование и единственность системы дифференциальных уравнений, решениями которой служат вектор-функции такого пространства, доказываются аналогично теоремам 3, 5.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n -формы на X , геометрические сечения которых $s_j = s[\omega_j]$, $j = 1, \dots, \mu$, образуют базис сечений когомологического расслоения Милнора. Набор таких форм в п. 12.1 назван тривиализацией (их геометрические сечения задают тривиализацию когомологического расслоения Милнора).

С таким набором форм связаны две системы дифференциальных уравнений. С одной стороны, это — уравнение (17) ковариантно постоянных сечений в репере $s_1, \dots, s_\mu$, с другой стороны, это — уравнение (11) Пикара—Фукса тривиализации.

Лемма 8. Матрица B уравнения ковариантно постоянных сечений и матрица A уравнения Пикара—Фукса тривиализации связаны соотношением $A + B^* = 0$.

Следствие. Пусть $s^1, \dots, s^\mu$ — репер гоомологического расслоения Милнора, сопряженный к реперу $s_1, \dots, s_\mu$. Тогда отображение $(I^1, \dots, I^\mu) \mapsto \sum I^j s^j$ задает изоморфизм пространства решений уравнения (11) Пикара—Фукса и пространства ковариантно постоянных сечений гоомологического расслоения Милнора. При этом изоморфизме решетка в пространстве решений уравнения Пикара—Фукса, выделенная в п. 12.2.В, переходит в решетку ковариантно постоянных сечений гоомологического расслоения Милнора, образованную сечениями, значения которых принадлежат естественному образу гоомологий с целыми коэффициентами.

Доказательство леммы легко следует из определений.

Лемма 8 и ее следствие дают геометрическую интерпретацию уравнению Пикара—Фукса тривиализации.

Рассмотрим базисную тривиализацию $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ (см. стр. 230). Согласно свойству 2 тривиализаций (стр. 231) для любого геометрического сечения $s[\omega]$ существуют голоморфные функции $p_1, \dots, p_\mu$, заданные в окрестности точки $0 \in S$, для которых $s[\omega] = \sum_j p_j s[\omega_j]$. Следовательно, геометрические сечения базисной тривиализации порождают базис модуля ростков геометрических сечений в точке $0 \in S$ над кольцом ростков голоморфных функций в точке $0 \in S$. Это свойство выделяет базисные тривиализации среди всех тривиализаций (леммы 5, 6).

Таким образом, особенность Пикара — Фукса критической точки (см. п. 12.2.Д) — это класс уравнений ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора в реперах, двойственных к реперам геометрических сечений, порождающих базис модуля ростков геометрических сечений в точке $0 \in S$.

§ 13. Коэффициенты разложений в ряд интегралов, весовая и ходжева фильтрации, спектр критической точки

Рассмотрим интеграл голоморфной дифференциальной формы по классам гомологий непрерывного семейства целочисленных гомологий слоев расслоения Милнора критической точки. Функция, заданная интегралом, разлагается в ряд по степеням параметра и степеням логарифма параметра семейства (§ 10). Каждый коэффициент ряда линейно зависит как от формы, так и от непрерывного семейства целочисленных гомологий. Если форму фиксировать, а непрерывные семейства менять, то каждый коэффициент ряда есть линейная функция на непрерывных семействах. Линейные над $\mathbb{C}$ комбинации непрерывных семейств целочисленных классов гомологий образуют пространство ковариантно постоянных (в связности Гаусса — Манина) сечений гомологического расслоения Милнора. Таким образом (если форма фиксирована), каждый коэффициент ряда есть линейная функция на пространстве ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора, т. е. — ковариантно постоянное сечение когомологического расслоения Милнора.

Другим способом это можно представить себе так. Голоморфной форме соответствует (однозначное) геометрическое сечение когомологического расслоения Милнора. Выберем в когомологическом расслоении ковариантно постоянный репер и разложим геометрическое сечение по этому реперу. Коэффициенты разложения суть многозначные функции. Нетрудно убедиться, что коэффициенты разложения имеют вид $\sum b_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Перегруппировав слагаемые, получим разложение геометрического сечения в ряд по степеням и логарифмам параметра с коэффициентами, являющимися ковариантно постоянными сечениями. Чтобы определить интегралы формы по классам гомологий ковариантно постоянного семейства гомологий,

достаточно определить числа, равные значениям коэффициентов ряда на данном ковариантно постоянном сечении гомологического расслоения Милнора.

Итак, геометрическое сечение разлагается в ряд

$$s[\omega] = \sum_{k, \alpha} t^\alpha (\ln t)^k A_{k, \alpha}^\omega / k!, \quad (1)$$

здесь ω — форма, $A_{k, \alpha}^\omega$ — ковариантно постоянные сечения. Коэффициенты $A_{k, \alpha}^\omega$ полностью определяют когомологические свойства форм ω/df , заданных на слоях расслоения Милнора. Более того, совокупность коэффициентов всех форм содержит информацию о критической точке.

В п. 13.1 доказываются основные свойства коэффициентов:

1. $A_{k, \alpha}^\omega(t) = (-\ln M_u / 2\pi i)^k A_{k, \alpha}^\omega(t)$, где M_u — унипотентная часть оператора классической монодромии M в когомологиях.

2. Сечение $A_{k, \alpha}^\omega$ принадлежит корневому подпространству оператора M , отвечающему собственному числу $\exp(-2\pi i \alpha)$.

3. Каждое сечение $A_{k, \alpha}^\omega$ голоморфно зависит от формы ω (точнее, от ее конечной струи в исходной критической точке).

Далее определяется *главная часть* формы (геометрического сечения) как сумма слагаемых ряда (1) с фиксированным α , наименьшим из встречающихся в ряде. Это наименьшее α называется *порядком* формы. Формулируются утверждения о вычислении порядка формы.

П.13.2 — основной. В пункте из главных частей всех форм строится убывающая фильтрация *) в слоях когомологического расслоения Милнора. Эта фильтрация называется *ходжевой*. Далее по жордановой структуре оператора монодромии строится возрастающая фильтрация в слоях когомологического расслоения Милнора. Она называется *весовой*. Подпространства фильтраций в разных слоях согласованы: они образуют голоморфные подрасслоения когомологического расслоения Милнора. В п. 13.2 сформулирована теорема о смешанной структуре Ходжа: весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа в слоях когомологического расслоения Милнора изолированной критической точки. Обсуждению этой теоремы посвящен § 14.

В п. 13.3 определены численные характеристики весовой и ходжевой фильтраций — *спектральные пары* критической точки. Спектральные пары — это неупорядоченный набор из μ пар чисел, где μ — кратность критической точки. Первое из чисел пары — рациональное число, второе — целое число. Неупорядоченный набор первых чисел пар называется *спектром критической точки*. Числа спектра — это деленные на $2\pi i$ логарифмы собственных чисел оператора монодромии. Выбор ветви логарифма определяется с помощью

*) Фильтрация линейного пространства — это упорядоченная последовательность его линейных подпространств.

главных частей голоморфных форм. Вторые числа в спектральных парах — это правильным образом перенормированные жордановы уровни элементов жорданова базиса. Спектр критической точки обладает замечательными свойствами:

1. Сумма всех спектральных чисел равна $\mu(n/2-1)$, где μ — кратность критической точки, n — число переменных.

2. Спектр симметричен относительно точки $n/2-1$.

3. Спектр невырожденной критической точки состоит из одного числа $n/2-1$. Если спектр сосредоточен в точке $n/2-1$, т. е. состоит из нескольких чисел $n/2-1$, то критическая точка невырождена.

4. Спектр не меняется при деформациях критической точки, не меняющих ее кратности.

5. Если $\{\alpha_i\}$, $i=1, \dots, \mu$, — спектр критической точки роста $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $\{\beta_j\}$, $j=1, \dots, \eta$, — спектр критической точки роста $g: (\mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, то $\{\alpha_i + \beta_j + 1\}$, $i=1, \dots, \mu$, $j=1, \dots, \eta$, — спектр критической точки роста $f+g: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Эти, а также другие свойства спектра обсуждаются в п. 13.3 и в § 14.

13.1. Коэффициенты разложений в ряд.

А. Коэффициенты и оператор монодромии. Рассмотрим росток $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции, имеющий критическую точку конечной кратности. Рассмотрим его специализацию $f: X \rightarrow S$ и соответствующее расслоение Милнора $f: X' \rightarrow S'$ (см. стр. 210). Если ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X и δ — ковариантно постоянное сечение гомологического расслоения Милнора, то

$$\int_{\delta(t)} \omega/df = \sum_{k, \alpha} a_{k, \alpha} t^\alpha (\ln t)^k / k!, \quad (2)$$

согласно теореме 10.8. В этой формуле коэффициенты $1/k!$ введены для упрощения дальнейших формул. В ряде (2) числа k, α не зависят от формы и сечения и определяются только оператором монодромии расслоения Милнора. Для фиксированной формы и фиксированных k, α коэффициент $a_{k, \alpha}$ определяет ковариантно постоянное многозначное сечение $A_{k, \alpha}^\omega$ кохомологического расслоения Милнора формулой $\langle A_{k, \alpha}^\omega(t), \delta(t) \rangle = a_{k, \alpha}(\omega, \delta)$. По определению

$$s[\omega](t) = \sum_{k, \alpha} t^\alpha (\ln t)^k A_{k, \alpha}^\omega(t) / k!, \quad (3)$$

где $s[\omega]$ — геометрическое сечение, отвечающее форме ω . Ряд (3) сходится в каждом секторе $a < \arg t < b$, если модуль параметра t достаточно мал.

Лемма 1.

$$1. A_{k, \alpha}^\omega = (-\ln(M_u)/2\pi i)^k A_{0, \alpha}^\omega, \quad (4)$$

где M_u — унитарная часть оператора монодромии в $(n-1)$ -мерных когомологиях.

2. Сечение $A_{k,\alpha}^\omega$ принадлежит корневому подпространству собственного числа $\exp(-2\pi i\alpha)$ оператора монодромии в $(n-1)$ -мерных когомологиях.

Замечание. Оператор монодромии M в когомологиях (или в ковариантно постоянных сечениях когомологического расслоения Милнора) — это оператор монодромии в связности Гаусса — Манина, порожденный обходом вокруг точки $t=0$ «против часовой стрелки». Если M_{hom} — оператор монодромии в $(n-1)$ -мерных гомологиях, определенный аналогичным образом, то $M^* = M_{\text{hom}}^{-1}$, где $*$ означает сопряжение.

Доказательство леммы вытекает из следующего замечания. Аналитическое продолжение вокруг точки $t=0$ левой части формулы (2) приводит к интегралу формы ω/df по $M_{\text{hom}}\delta(t)$. Аналитическое продолжение правой части вокруг точки $t=0$ состоит в подстановке вместо t выражения $te^{2\pi i}$. Сравнивая два способа продолжения, получаем лемму. Подробнее см. в [22].

Следствия леммы. 1. Геометрическое сечение $s[\omega]$ определяется сечениями $A_{k,\alpha}^\omega$ с $k=0$.

2. Если для некоторого α $A_{0,\alpha}^\omega = 0$, то для всех k $A_{k,\alpha}^\omega = 0$.

3. Для любого α

$$t^\alpha (A_{0,\alpha}^\omega(t) + \dots + (\ln t)^{n-1} A_{n-1,\alpha}^\omega(t)/(n-1)!) = \\ = \exp(\ln t (\alpha \text{Id} - \ln(M_u)/2\pi i)) A_{0,\alpha}^\omega(t).$$

(Напомним, что размеры жордановых клеток оператора монодромии не больше n , поэтому коэффициенты $A_{k,\alpha}^\omega$ с $k \geq n$ равны нулю.)

4. Сечение, заданное предыдущей формулой, является голоморфным однозначным сечением когомологического расслоения Милнора.

Лемма 2. Каждое сечение $A_{k,\alpha}^\omega$ зависит только от конечной струи формы ω в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ и, более того, зависит от этой струи голоморфно.

Лемма 2 — следствие леммы 12.3.

Б. Элементарные сечения. Пусть A — многозначное ковариантно постоянное сечение когомологического расслоения Милнора, принадлежащее корневому подпространству собственного числа λ оператора монодромии в когомологиях. Пусть α — рациональное число со свойством: $\exp(-2\pi i\alpha) = \lambda$. Определим сечение $s[A, \alpha]$ когомологического расслоения формулой

$$s[A, \alpha] = \exp[\ln t (\alpha \text{Id} - \ln(M_u)/2\pi i)] A.$$

Сечение $s[A, \alpha]$ называется элементарным сечением порядка α , порожденным сечением A .

Согласно лемме 2 геометрическое сечение является суммой элементарных сечений: $s[\omega] = \sum_{\alpha} s[A_{0,\alpha}^\omega, \alpha]$.

Лемма 3. 1. $s[A, \alpha]$ — однозначное голоморфное сечение когомологического расслоения.

2. Если ковариантно постоянные сечения $A_1, \dots, A_l$ принадлежат корневому подпространству собственного числа λ оператора M и линейно независимы над $\mathbb{C}$, то значения сечений $s[A_1, \alpha], \dots, s[A_l, \alpha]$ линейно независимы в каждой точке базы когомологического расслоения.

3. $t \nabla_{\partial/\partial t} s[A, \alpha] = \alpha s[A, \alpha] + s[-\ln(M_u) \cdot A/2\pi i, \alpha]$, где $\nabla_{\partial/\partial t}$ — дифференцирование в связности Гаусса—Манина, т. е. дифференцирование координат сечения в ковариантно постоянном репере.

Доказательство. Пп. 1, 3 очевидны. П. 2 следует из линейной независимости ковариантно постоянных сечений и невырожденности линейного преобразования $\exp[\dots]$.

В. Порядок и главная часть формы. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X (пространстве прообраза специализации ростка $\mathbf{f}$). Порядком формы (геометрического сечения, определенного формой) называется наименьшее число α , для которого отличен от нуля коэффициент $A_{0,\alpha}^\omega$. Порядок обозначается через $\alpha(\omega)$.

Напомним, что согласно лемме 1, если $A_{0,\alpha}^\omega = 0$, то $A_{k,\alpha}^\omega = 0$ для всех k .

Главной частью формы (геометрического сечения, определенного формой) называется однозначное голоморфное сечение $s_{\max}[\omega]$ когомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\mathbf{f}$, заданное формулой

$$s_{\max}[\omega] = t^{\alpha(\omega)} (A_{0,\alpha(\omega)}^\omega + \dots + (\ln t)^{n-1} A_{n-1,\alpha(\omega)}^\omega / (n-1)!).$$

Замечания. 1. Пусть η — голоморфная дифференциальная $(n-1)$ -форма на X . Ее ограничения на слои расслоения Милнора определяют геометрическое сечение $s[\eta]$. По построению $s[\eta] = s[df \wedge \eta]$. Это равенство определяет порядок и главную часть формы η и ее геометрического сечения.

2. Если форма определяет нулевое геометрическое сечение, то полагаем ее порядок равным $+\infty$, а ее главную часть равной нулевому сечению когомологического расслоения.

Пример. Пусть f — квазиоднородный многочлен и ω — квазиоднородная форма старшей степени. Тогда интеграл ее формы Гельфанда—Лере по классам гомологий ковариантно постоянного семейства имеет вид $\text{const} \cdot t^{\alpha-1}$, где α — отношение степеней квазиоднородности формы и многочлена. Поэтому главная часть формы равна ее геометрическому сечению, т. е.

$$s[\omega](t) = s_{\max}[\omega](t) = t^{\alpha-1} A_{0,\alpha-1}^\omega(t).$$

Сформулируем полезное свойство порядков и главных частей.

Лемма 4 (см. [22]). Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n -формы на X . Пусть $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ — базис ковари-

антно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора критической точки роста $\mathbf{f}$. Обозначим через ord порядок нуля при $t=0$ функции

$$\det^2: t \mapsto \det^2 \left(\int_{\delta_l(t)} \omega_j / df \right), \quad j, l = 1, \dots, \mu.$$

Тогда $\text{ord}/2 \geq \alpha(\omega_1) + \dots + \alpha(\omega_\mu)$; равенство имеет место тогда и только тогда, когда главные части форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — линейно независимые сечения когомологического расслоения Милнора.

Доказательство очевидно.

Г. Порядок формы и показатель главного члена асимптотики осциллирующего интеграла. Рассмотрим комплексный осциллирующий интеграл с фазой $\mathbf{f}$ по допустимой цепи, сосредоточенной в окрестности критической точки роста $\mathbf{f}$, т. е. интеграл $\int_{[\Gamma]} e^{\tau \mathbf{f}} \omega$, где $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$, ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X (см. п. 11.1). Согласно теореме 11.1 при $\tau \rightarrow +\infty$ интеграл разлагается в ряд $\sum a_{k,\alpha} \tau^\alpha (\ln \tau)^k$. Обозначим через $\beta(\omega, [\Gamma])$ наибольшее α , присутствующее в этом ряде, т. е. $\beta(\omega, [\Gamma])$ — показатель главного члена асимптотического ряда.

Лемма 5. Для любой цепи $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$ имеет место неравенство $\beta(\omega, [\Gamma]) \leq -\alpha(\omega) - 1$, где $\alpha(\omega)$ — порядок формы ω . Более того, существует $[\Gamma]$, для которой $\beta(\omega, [\Gamma]) = -\alpha(\omega) - 1$.

Доказательство. См. формулы (4) — (6) на стр. 221.

Д. Комплексный показатель осцилляции. Обозначим через $\alpha_{\min}$ наименьшее число среди порядков голоморфных n -форм на X . Число $-(1 + \alpha_{\min})$ называется комплексным показателем осцилляции критической точки роста $\mathbf{f}$.

Согласно лемме 5 комплексный показатель осцилляции — это наибольшее возможное значение показателя главного члена асимптотики комплексного осциллирующего интеграла с фазой $\mathbf{f}$ по допустимой цепи, сосредоточенной в окрестности критической точки роста $\mathbf{f}$.

Пример. Для критических точек функций $x^{\mu+1}, x_1^2 + \dots + x_n^2$ комплексный показатель осцилляции равен соответственно $-1/(\mu+1), -n/2$.

Лемма 6. Предположим, что росток $\mathbf{f}$, ограниченный на вещественное подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, принимает только вещественные значения. Тогда показатель осцилляции роста $\mathbf{f}|_{\mathbb{R}^n}$, определенный в § 6, не больше комплексного показателя осцилляции роста $\mathbf{f}$.

Доказательство. Комплексный показатель осцилляции равен наибольшему возможному значению порядка комплексного осциллирующего интеграла с фазой $\mathbf{f}$ при всевозможных $[\Gamma], \omega$. Вещественный показатель осцилляции равен наибольшему возможному значению порядка комплексного осциллирующего интегра-

ла с фазой f по вещественному контуру $[\Gamma_R]$ при всевозможных ω (см. теорему 11.3).

Как показывает пример 1 § 9, комплексный показатель осцилляции может быть строго больше вещественного показателя осцилляции.

Определение. *Комплексным показателем особости критической точки роста f называется число $n/2 - (1 + \alpha_{\min})$, равное увеличенному на $n/2$ комплексному показателю осцилляции.*

Пример. Для критических точек функций $x^{\mu+1}, x_1^2 + \dots + x_n^2$ комплексный показатель особости равен соответственно $1/2 - 1 (\mu + 1), 0$.

Комплексные показатели особости равны у стабильно эквивалентных точек, см. п. 13.3.Д. Комплексный показатель особости неотрицателен, см. п. 13.3.В.

Е. Порядок формы и разрешение особенностей критической точки роста f . Согласно теореме 7.3 показатель осцилляции критической точки вещественно аналитической функции равен весу разрешения особенностей. Сформулируем комплексно-аналитический аналог этого утверждения.

Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ — разрешение особенностей критической точки 0 функции $f: X \rightarrow S$ (где $f: X \rightarrow S$ — специализация роста f). Это означает, что

1. Y — неособое комплексно-аналитическое n -мерное многообразие, π — собственное голоморфное отображение, индуцирующее биголоморфизм между $Y \setminus \pi^{-1}(0)$ и $X \setminus 0$.

2. $(f \circ \pi)^{-1}(0)$ — объединение гладких дивизоров на Y , пересекающихся нормально (см. пп. 1—4, определения разрешения — на стр. 144).

Разрешение особенностей существует согласно теореме Хиронаки [106].

Разложим прообраз критической точки функции f в объединение неособых неприводимых $(n-1)$ -мерных комплексно-аналитических множеств $E_1, \dots, E_N$. С каждой из этих неприводимых компонент корректно связаны два неотрицательных целых числа: кратности нулей на этой компоненте соответственно функции $f \circ \pi$ и якобиана отображения π . Эти числа обозначим соответственно через k, m . Число $-(m+1)/k$ называется *весом компоненты* (ср. с п. 7.3.А). Максимум весов компонент $E_1, \dots, E_N$ называется *весом разрешения особенностей*.

Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X . С формой $\pi^*\omega$ на Y и произвольной компонентой $E_i, i=1, \dots, N$, корректно связаны два неотрицательных целых числа: кратности нулей на этой компоненте соответственно функции f и формы $\pi^*\omega$. Эти числа обозначим соответственно через k, m . Число $-(m+1)/k$ называется *весом компоненты относительно ω* . Максимум весов компонент $E_1, \dots, E_N$ называется *весом относительно ω разрешения особенностей*.

Легко видеть, что вес разрешения особенностей равен весу разрешения особенностей относительно формы $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Теорема 1 (см. [22]). 1. *Комплексный показатель осцилляции критической точки ростка $\mathbf{f}$ не больше веса разрешения особенностей критической точки. Комплексный показатель осцилляции равен весу разрешения, если вес разрешения не меньше -1 .*

2. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X . Пусть $\alpha(\omega)$ — ее порядок. Тогда число $-(\alpha(\omega) + 1)$ не больше веса относительно ω разрешения особенностей критической точки ростка $\mathbf{f}$. Более того, число $-(\alpha(\omega) + 1)$ равно весу относительно ω , если вес относительно ω не меньше -1 .

Замечание. Эта теорема аналогична теореме 7.5 и является уточнением теоремы 10.7'. Утверждения теоремы, касающиеся неравенств, доказаны также в [30].

Для доказательства неравенств в утверждениях теоремы нужно произвольную форму ω поднять на Y и оценить через числа k, m интегралы ее формы Гельфанда — Лере в окрестности произвольной точки прообраза критической точки ростка $\mathbf{f}$.

Для доказательства равенств в утверждениях нужно для произвольной формы ω , относительно которой вес разрешения не меньше -1 , предъявить непрерывное семейство исчезающих гомологий, интегралы по которым формы ω/df имеют требуемый порядок. Для этого правильным образом определяется предел формы $\pi^*(\omega/df)$ на каждом некомпактном дивизоре $E_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} E_j \right) \cap E_i, i = 1, \dots, N$,

точнее, на подходящем $k(E_i)$ -листном накрытии этого некомпактного дивизора. Предельные формы являются голоморфными $(n-1)$ -формами на накрытиях, мероморфными около попарных пересечений дивизоров. Если вес относительно формы ω не меньше -1 , то на одном из накрытий полюсы предельной формы имеют не выше чем первый порядок. По теореме П. Делиня (см. [145, 158]) такая форма порождает ненулевой класс когомологий. На указанном накрытии выделяется $(n-1)$ -мерный цикл, интеграл по которому предельной формы отличен от нуля. Сдвиги этого цикла с накрытия дивизора в гиперповерхности уровня функции $f \circ \pi$ определяют искомое семейство исчезающих гомологий. См. ([22], § 4).

Ж. Порядок формы и многогранники Ньютона. Переформулируем утверждения теоремы 1 в терминах многогранников Ньютона критической точки ростка $\mathbf{f}$ и формы ω .

Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X . Определим рациональное число, называемое удаленностью многогранников ростка $\mathbf{f}$ и формы ω . Запишем ω в виде $g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, рассмотрим многогранник Ньютона $\Gamma(x_1 \dots x_n g)$ ряда Тейлора функции g , вычисленного в критической точке ростка $\mathbf{f}$ и умноженного на произведение всех компонент. Рассмотрим второй многогранник — многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки ростка $\mathbf{f}$. *Удаленностью многогранников ростка $\mathbf{f}$ и формы*

ω назовем взятую с минусом величину, обратную к коэффициенту вложения первого многогранника во второй (см. п. 8.3.А, стр. 186).

Теорема 2 (см. [22], а также [30]). *Предположим, что ряд Тейлора критической точки ростка $\hat{f}$ имеет $\mathbb{C}$ -невырожденную главную часть.*

1. *Комплексный показатель осцилляции критической точки ростка $\hat{f}$ не больше удаленности многогранника Ньютона критической точки. Комплексный показатель осцилляции равен удаленности, если многогранник Ньютона является далеким (см. определения в § 6).*

2. *Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X . Пусть $\alpha(\omega)$ — ее порядок. Тогда число $-(\alpha(\omega) + 1)$ не больше удаленности многогранников ростка $\hat{f}$ и формы ω . Более того, число $-(\alpha(\omega) + 1)$ равно удаленности многогранников ростка и формы, если удаленность не меньше -1 .*

Теорема 2 выводится из теоремы 1 так же, как теоремы 8.3, 8.4 выводятся из теоремы 7.5.

Пример. Пусть $\hat{f} = x_1^6 + x_1^3 x_2^2 + x_2^6$, $\omega = x_1 x_2 \cdot dx_1 \wedge dx_2$. Тогда комплексный показатель осцилляции ростка $\hat{f}$ равен $-7/18$, порядок формы ω равен $-7/9$.

Имеются комплексно-аналитические аналоги теорем 6.5, 8.5, см. [22].

13.2. Ходжева и весовая фильтрации в слоях когомологического расслоения Милнора критической точки.

А. Ходжева фильтрация. Среди голоморфных сечений когомологического расслоения Милнора выделен класс геометрических сечений. Это — сечения, порожденные формами Гельфанда — Лере голоморфных форм старшей степени. Геометрических сечений много (из них можно составить базис голоморфных сечений когомологического расслоения). Однако геометрические сечения ведут себя очень специальным образом по отношению к ковариантно постоянным сечениям при стремлении точки базы к точке $t=0$. Характеристикой асимптотических свойств геометрических сечений является определяемое ниже понятие ходжевой фильтрации когомологического расслоения Милнора. Ходжева фильтрация — это убывающая последовательность аналитических подрасслоений когомологического расслоения Милнора. Класс когомологий слоя расслоения Милнора (или, что то же самое, вектор слоя когомологического расслоения Милнора) принадлежит подрасслоению с номером k , если он является значением главной части геометрического сечения порядка не выше, чем $n-k-1$.

Теперь уточним определение. Определим последовательность аналитических подрасслоений $F^k(f^*): F^k \rightarrow S'$, $k \in \mathbb{Z}$, когомологического расслоения критической точки ростка $\hat{f}$. Эту последовательность назовем *ходжевой фильтрацией* когомологического расслоения Милнора $f^*: H^{n-1} \rightarrow S'$ критической точки ростка $\hat{f}$. Подрасслоения определим, задавая их сечения. Пусть слои F_t^k

$(t \in S')$ — это линейные подпространства, порожденные значениями главных частей геометрических сечений порядка не большего, чем $n - k - 1$. Если таких сечений нет, то полагаем $F_t^k = \{0\}$. Другими словами, F_t^k — это подпространства, натянутые на векторы вида $s_{\max}[\omega](t)$, где ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X порядка не большего, чем $n - k - 1$. Перечислим очевидные следствия определения.

Лемма 7. 1. Для любых $k \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$ подпространство $F_t^k \subset H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ является прямой суммой своих пересечений с корневыми подпространствами оператора монодромии, т. е. ходжева фильтрация инвариантна относительно полупростой части оператора монодромии.

2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ $F^k(f^*) : F^k \rightarrow S'$ — аналитическое подрасслоение кохомологического расслоения Милнора.

3. Подрасслоения ходжевой фильтрации образуют убывающую фильтрацию, т. е. для любого k $F^{k+1} \subset F^k$.

4. Если $k \geq n$, то $F^k(f^*)$ — подрасслоения ранга 0.

5. Существует k , для которого F^k совпадает с H^{n-1} .

Доказательство. П. 1 — следствие п. 2 леммы 1.

Докажем п. 2. Если форму умножить на f , то геометрическое сечение формы умножается на t . Поэтому подпространства F_t^k порождаются главными частями геометрических сечений, веса которых заключены в пределах $n - k - 2 < \alpha(\omega) \leq n - k - 1$. Теперь п. 2 — следствие п. 2 леммы 3.

П. 3 очевиден. П. 4 — следствие теоремы 10.8.

Для доказательства п. 5 нужно предъявить набор форм, у которых главные части образуют базис сечений кохомологического расслоения Милнора. Согласно теореме о детерминанте на X существуют голоморфные n -формы $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, у которых геометрические сечения образуют базис сечений кохомологического расслоения. Если главные части этих форм образуют базис сечений, то п. 5 доказан, если — не образуют, то формы нужно подправить. Для этого нужно взять подходящую невырожденную $\mu \times \mu$ -матрицу Q голоморфных функций на S , отображением f индуцировать матрицу $Q(f)$ голоморфных функций на X и рассмотреть новые формы $\omega'_i = \sum_j Q(f)^i_j \omega_j$, $j = 1, \dots, \mu$. Существование матрицы, для которой главные части новых форм образуют базис сечений, легко следует из выбора форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$; см. [22].

З а м е ч а н и е. Из формулируемой ниже теоремы о смешанной структуре Ходжа (см. также [22]) следует, что F^0 совпадает с H^{n-1} .

Пример 1. Пусть $f = x^{\mu+1}$. Когомологическое расслоение Милнора — это расслоение ранга μ приведенных нульмерных кохомологий слоев расслоения Милнора (каждый из которых состоит из $(\mu + 1)$ -й точки). Согласно лемме 11.3 $\{0\} = F^1 \subset F^0 = H^0$.

Пример 2. Пусть $f = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Когомологическое расслоение Милнора одномерно. Согласно примеру в п. 10.3.Г

$\{0\} = F^{[n/2]+1} \subset F^{[n/2]} = H^{n-1}$, подрасслоение $F^{[n/2]}(f^*)$ порождается главной частью формы $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Б. Весовая фильтрация линейного оператора (см. [156, 158, 213]). С линейным нильпотентным оператором (т. е. с линейным оператором, собственные числа которого равны нулю) связана возрастающая фильтрация в пространстве действия оператора. Ниже приведены три ее эквивалентных определения. Первое из них — наиболее неинвариантное и наиболее понятное. Последнее определение — наиболее распространенное и, вероятно, наименее понятное.

Пусть H — конечномерное векторное пространство, $N: H \rightarrow H$ — нильпотентный линейный оператор, k — целое число. Определяемая ниже последовательность подпространств

$$\{0\} \subset \dots \subset W_l \subset W_{l+1} \subset \dots \subset H \quad (5)$$

называется *весовой фильтрацией оператора N с центральным индексом k* .

О п р е д е л е н и е 1. Рассмотрим произвольный жорданов базис оператора N . Каждое подпространство весовой фильтрации порождается определяемым ниже множеством векторов жорданова базиса.

Элементы базиса разделим на группы, относя в одну группу векторы одной жордановой клетки. Изобразим одну группу:

$$\square \rightarrow \square \rightarrow \dots \rightarrow \square;$$

клетки — это векторы группы, стрелки — действие оператора, последний вектор переходит в нуль. Теперь изобразим все группы друг над другом, располагая их симметрично относительно вертикальной оси и оставляя для стрелок пропуски в одну клетку (см. рис. 79). Каждому вектору базиса припишем целое число — расстояние со знаком до оси симметрии (на рис. 79 числа записаны в клетках). Пусть $W_{k+l} \subset H$ — это подпространство, порожденное векторами базиса с номерами, не большими чем l (см. рис. 79).

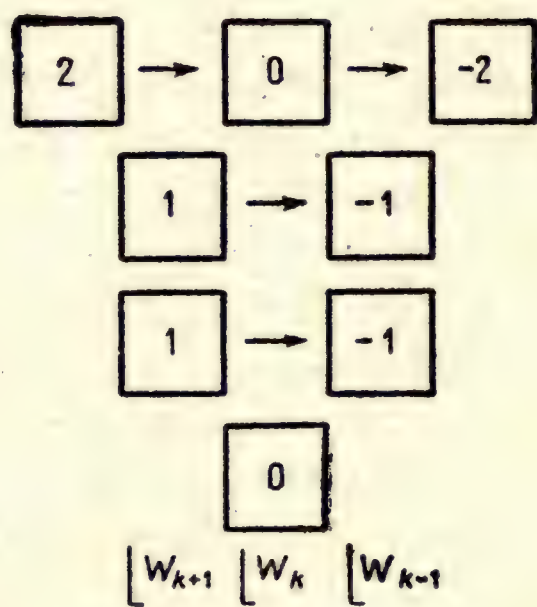


Рис. 79.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $h \in H$. Положим

$$l_+(h) = \min \{l \mid h \in \ker N^l\}, \quad l_-(h) = \max \{l \mid h \in \operatorname{Im} N^l\}.$$

Определим подпространство W_{k+l} условием

$$h \in W_{k+l} \Leftrightarrow l_+(h) - l_-(h) \leq l + 1.$$

Определение-лемма 3 (см. [213]). Существует и единственная фильтрация (5), обладающая следующими свойствами:

$$а) N(W_l) \subset W_{l-2}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$\text{gr}_l W = W_l / W_{l-1}.$$

Согласно а) N индуцирует отображение $\text{gr}_l W \rightarrow \text{gr}_{l-2} W$.

$$б) N^l: \text{gr}_{k+l} W \rightarrow \text{gr}_{k-l} W \text{ — изоморфизм, } l \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 8 (см. [213]). Определения 1—3 эквивалентны.

В. Весовая фильтрация кохомологического расслоения Милнора. Определим последовательность аналитических подрасслоений

$$W_l(f^*): W_l \rightarrow S', \quad l \in \mathbb{Z}$$

когомологического расслоения Милнора критической точки ростка f . Эту последовательность назовем *весовой фильтрацией* кохомологического расслоения Милнора критической точки ростка f .

Сначала определим пересечения слоев подрасслоений $\{W_l(f^*)\}$ с корневыми подпространствами оператора монодромии, затем положим слои подрасслоений $\{W_l(f^*)\}$ равными прямой сумме их пересечений с корневыми подпространствами.

Обозначим через $H_{\lambda}^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ корневое подпространство собственного числа λ оператора монодромии в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$. Обозначим через N логарифм унипотентной части оператора монодромии. N — нильпотентный оператор, коммутирующий с оператором монодромии и, значит, сохраняющий его корневые подпространства.

Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда в качестве весовой фильтрации на $H_{\lambda}^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ возьмем весовую фильтрацию оператора N с центральным индексом $n-1$. Пусть $\lambda = 1$. Тогда в качестве весовой фильтрации на $H_1^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ возьмем весовую фильтрацию оператора N с центральным индексом n . Положим слой над t расслоения $W_l(f^*)$ равным

$$W_{l,t} = \bigoplus W_l(H_{\lambda}^{n-1}(X_t, \mathbb{C})).$$

Перечислим очевидные следствия определения.

Л е м м а 9. 1. Весовая фильтрация — возрастающая последовательность аналитических подрасслоений кохомологического расслоения Милнора.

2. Весовая фильтрация инвариантна относительно связности Гаусса — Манина (т. е. ковариантные производные сечений каждого подрасслоения принадлежат тому же подрасслоению).

3. Весовая фильтрация инвариантна относительно действия полупростой части оператора монодромии.

4. Для любого $l \in \mathbb{Z}$ и любой точки $t \in S'$

$$N(W_{l,t}) \subset W_{l-2,t}.$$

Более того, если $\lambda \neq 1$, то

$$N^l: \operatorname{gr}_{n-1+l} W(H_\lambda^{n-1})_t \rightarrow \operatorname{gr}_{n-1-l} W(H_\lambda^{n-1})_t$$

— изоморфизм, если $\lambda = 1$, то

$$N^l: \operatorname{gr}_{n+l} W(H_1^{n-1})_t \rightarrow \operatorname{gr}_{n-l} W(H_1^{n-1})_t$$

— изоморфизм.

Доказательство очевидно.

Сформулируем еще одно свойство весовой фильтрации. Напомним, что в слоях когомологического расслоения Милнора имеется инвариантная относительно связности Гаусса—Манина операция комплексного сопряжения: пространство $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ есть комплексификация естественного образа в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ пространства $H^{n-1}(X_t, \mathbb{R})$. Более того, в слоях имеется инвариантная относительно связности Гаусса—Манина целочисленная структура—решетка в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$, являющаяся естественным образом в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ группы $H^{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$.

Лемма 10. Для любого $l \in \mathbb{Z}$ слои подрасслоения $W_l(f^*)$ инвариантны относительно сопряжения. Более того, в координатах, связанных с базисом целочисленной решетки, слой подрасслоения $W_l(f^*)$ может быть задан уравнениями с целыми коэффициентами.

Доказательство легко следует из определения весовой фильтрации.

Пример 1. Пусть $f = x^{\mu+1}$. Собственные числа оператора монодромии—это $\exp(2\pi i k/(\mu+1))$, $k = 1, \dots, \mu$. Поэтому

$$\{0\} = W_{-1} \subset W_0 = H^0.$$

Пример 2. Пусть $f = x_1^2 + \dots + x_n^2$. $(-1)^n$ —единственное собственное число оператора монодромии. Поэтому

$$\{0\} = W_{2[n/2]-1} \subset W_{2[n/2]} = H^{n-1}.$$

Пример 3. Предположим, что оператор монодромии в когомологиях, исчезающих в критической точке голоморфной функции n переменных, имеет конечный порядок (например, это так для критической точки (полу)квазиоднородной функции). Тогда

$$\{0\} = W_{n-2} \subset W_{n-1} \subset W_n = H^{n-1},$$

где $W_{n-1} = \bigoplus_{\lambda \neq 1} H_\lambda^{n-1}$.

З а м е ч а н и е 1. Указанная в определении весовой фильтрации зависимость центрального индекса фильтрации от собственного числа оператора монодромии мотивируется формулируемой ниже теоремой о смешанной структуре Ходжа. Центральный индекс выбирается так, чтобы весовая фильтрация вместе с ходжевой фильтрацией составляли смешанную структуру Ходжа.

З а м е ч а н и е 2. Согласно теореме 3.12 размер жордановых клеток оператора монодромии критической точки функции n

переменных не больше n . Поэтому а priori

$$\{0\} = W_{-1}(H_{\lambda \neq 1}^{n-1}) \subset W_0(H_{\lambda \neq 1}^{n-1}) \subset \dots \subset W_{2n-2}(H_{\lambda \neq 1}^{n-1}) = H_{\lambda \neq 1}^{n-1},$$

$$\{0\} = W_0(H_1^{n-1}) \subset W_1(H_1^{n-1}) \subset \dots \subset W_{2n-1}(H_1^{n-1}) = H_1^{n-1}.$$

Однако, согласно формулируемой ниже теореме о смешанной структуре Ходжа, размер жордановых клеток с собственным числом 1 не больше $n-1$. Поэтому $W_1(H_1^{n-1}) = \{0\}$, $W_{2n-2}(H_1^{n-1}) = H_1^{n-1}$, $W_{2n-2} = H^{n-1}$.

Г. Взаимное расположение весовой и ходжевой фильтраций (элементарные свойства).

Лемма 11. Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ пересечение пространств F^k , W_l вместе с проекцией на базу образует голоморфное подрасслоение

$$F^k \cap W_l(f^*): F^k \cap W_l \rightarrow S'$$

когомологического расслоения Милнора критической точки роста f .

Доказательство. Достаточно доказать, что все слои проекции $F^k \cap W_l \rightarrow S'$ имеют равные размерности. Поскольку подрасслоение $F^k(f^*)$ порождается главными частями форм с заданными весами, достаточно доказать, что значения главной части произвольной формы принадлежат или не принадлежат W_l одновременно для всех точек базы (см. п. 2 леммы 3). Докажем это. Согласно формуле (4) на стр. 255 значение главной части $s_{\max}[\omega](t)$ в точке $t \in S'$ принадлежит W_l тогда и только тогда, когда вектор $A_{0, \alpha(\omega)}^\omega(t)$ принадлежит W_l . Этот вектор принадлежит W_l тогда и только тогда, когда сечение $A_{0, \alpha(\omega)}^\omega$ является сечением подрасслоения $W_l(f^*)$, что и требовалось доказать.

Для любого l обозначим через

$$\text{gr}_l W(f^*): \text{gr}_l W \rightarrow S'$$

фактор-расслоение подрасслоений $W_l(f^*)$, $W_{l-1}(f^*)$, его слои — факторпространства $\text{gr}_l W_t = W_{l,t}/W_{l-1,t}$, где $t \in S'$. Расслоение $\text{gr}_l W(f^*)$ обладает индуцированной связностью Гаусса — Манина в силу п. 2 леммы 9. В слоях расслоения $\text{gr}_l W(f^*)$ заданы вещественная и целочисленная структура (в силу леммы 10) и действие полупростой части оператора монодромии (в силу п. 3 леммы 9).

Замечание. Действие оператора монодромии в слоях расслоения $\text{gr}_l W(f^*)$ совпадает с действием его полупростой части, см. пп. 3, 4 леммы 9.

Следствие леммы 11. Проекция в $\text{gr}_l W(f^*)$ расслоения $F^k \cap W_l(f^*)$ определяет подрасслоение

$$F^k \text{gr}_l W(f^*): F^k \text{gr}_l W \rightarrow S',$$

его слои — факторпространства $F^k \text{gr}_l W_t = (F_t^k \cap W_{l,t} + W_{l-1,t})/W_{l-1,t}$, где $t \in S'$.

Подрасслоение $F^k \text{gr}_l W(f^*) \subset \text{gr}_l W(f^*)$ инвариантно относительно действия полупростой части оператора монодромии (леммы 7, 9).

и инвариантно относительно связности Гаусса—Манина (п. 3 леммы 3).

Рассмотрим оператор N — логарифм унипотентной части оператора монодромии. Оператор N определяет морфизм расслоений $N: \text{gr}_l W \rightarrow \text{gr}_{l-2} W$ (т. е. линейное по слоям отображение, перестановочное с проекцией на базу и сохраняющее класс голоморфных сечений).

Лемма 12. Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$

$$N(F^k \text{gr}_l W) \subset F^{k-1} \text{gr}_{l-2} W.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что, если голоморфная дифференциальная n -форма ω обладает свойствами:

- а) имеет порядок, не больший чем $n - k - 1$;
- б) ее главная часть является сечением подрасслоения $W_l(f^*)$, то проекция сечения $Ns_{\max}[\omega]$ в фактор-расслоение $\text{gr}_{l-2} W(f^*)$ является сечением подрасслоения $F^{k-1} \text{gr}_{l-2} W(f^*)$.

Отметим, что согласно лемме 1

$$Ns_{\max}[\omega] = -2\pi i t^\alpha (A_{1, \alpha(\omega)}^\omega + \dots + (\ln t)^{n-2} A_{n-1, \alpha(\omega)}^\omega / (n-2)!). \quad (6)$$

Таким образом, достаточно предъявить две формы и их линейную комбинацию, у которой главная часть обладает свойствами:

- в) она является сечением подрасслоения $W_{l-2}(f^*)$;
- г) ее проекция в $\text{gr}_{l-2} W(f^*)$ пропорциональна проекции сечения $Ns_{\max}[\omega]$;
- д) ее проекция в $\text{gr}_{l-2} W(f^*)$ является сечением подрасслоения $F^{k-1} \text{gr}_{l-2} W(f^*)$.

Первая форма — $f\omega$,

$$s_{\max}[f\omega] = t^{\alpha(\omega)+1} (A_{0, \alpha(\omega)}^\omega + \dots + (\ln t)^{n-1} A_{n-1, \alpha(\omega)}^\omega / (n-1)!).$$

Вторая форма — это произвольная форма $\psi = df \wedge \eta$, где $d\eta = \omega$. Согласно формуле (3) на стр. 209

$$s_{\max}[\psi] = \int_0^t s_{\max}[\omega](u) du = t^{\alpha(\omega)+1} (A_{0, \alpha(\omega)}^\omega / (\alpha(\omega) + 1) - A_{1, \alpha(\omega)}^\omega / (\alpha(\omega) + 1)^2 + \dots), \quad (7)$$

где пропущены слагаемые, в которые входят либо $A_{k, \alpha(\omega)}^\omega$ с $k \geq 2$, либо $(\ln t)^k$ с $k \geq 1$. Линейной комбинацией со свойствами в) — д) является форма $f\omega - (\alpha(\omega) + 1)\psi$. Действительно,

$$s_{\max}[f\omega - (\alpha(\omega) + 1)\psi] = t^{\alpha(\omega)+1} (A_{1, \alpha(\omega)}^\omega / (\alpha(\omega) + 1) + \dots), \quad (8)$$

где пропущены слагаемые того же сорта. Согласно лемме 1 справедливы свойства в), г). Поскольку порядок линейной комбинации равен $\alpha(\omega) + 1$, справедливо свойство д). Лемма доказана.

Замечание. Как показывают формулы (6), (8), операция перехода от $s_{\max}[\omega]$ к $s_{\max}[f\omega - (\alpha(\omega) + 1)\psi]$ очень похожа на применение к $s_{\max}[\omega]$ логарифма унипотентной части оператора

монодромии. Кроме того, формы $f\omega$, $f\omega - (\alpha(\omega) + 1)\psi$ порождают один и тот же элемент в $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, где $\Omega^p(X)$ — голоморфные p -формы на X . Таким образом, формулы (6), (8) показывают аналогию действия в когомологиях логарифма унипотентной части монодромии и действия в $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ оператора умножения на f . Подробнее см. в п. 14.3.Д, [21].

Сформулируем теперь теорему о смешанной структуре Ходжа. Обсуждению утверждения теоремы, а также ее следствий, посвящен § 14. Подробное определение смешанной структуры Ходжа см. в п. 14.1.

Т е о р е м а 3 (О смешанной структуре Ходжа; см. [19, 20, 22].) *Весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа в слоях когомологического расслоения Милнора критической точки, т. е. для любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$*

$$\mathrm{gr}_l W_t = F^k \mathrm{gr}_l W_t \oplus \overline{F^{l-k+1} \mathrm{gr}_l W_t}, \quad (9)$$

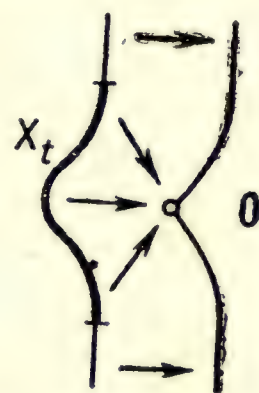
где $\oplus$ — прямая сумма, черта означает сопряжение.

З а м е ч а н и е. Смешанная структура Ходжа в исчезающих когомологиях определена Стинбринком в [221]. Весовая фильтрация, определенная в п. В, совпадает с весовой фильтрацией Стинбринка. Ходжева фильтрация, определенная в п. А, вообще говоря, отличается от ходжевой фильтрации Стинбринка. Ходжева фильтрация п. А и ходжева фильтрация Стинбринка совпадают на фактор-расслоениях весовой фильтрации. Ходжева фильтрация п. А и ходжева фильтрация Стинбринка просто выражаются друг через друга: ходжево подрасслоение $F^k(f^*)$ п. А порождается главными частями форм, порядков, принадлежащих полуинтервалу $(n-k-2, n-k-1]$; если $s_{\max}[\omega]$ — одна такая главная часть, то $(\nabla_{\partial/\partial t})^{n-k-1} s_{\max}[\omega]$ — сечение ходжева подрасслоения $F_{St}^k(f^*)$ Стинбринка. Определение ходжевой фильтрации Стинбринка использует разрешение особенностей критической точки ростка $\hat{f}$ и не использует асимптотик интегралов голоморфных форм; подробнее см. в [221, 20, 22, 23].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы см. в [20, 22] (схема доказательства изложена в [20], недостающие детали и отдельное доказательство для случая $n=2$ см. в [22]). Доказательство выводится из глубокой и нетривиальной теории деформаций структур Ходжа когомологий компактных неособых кэлеровых многообразий. Эта теория развита Гриффитсом, Шмидом, Делинем (см. [156, 158, 213, 145]). В когомологиях компактного неособого кэлерового многообразия имеется естественная фильтрация — структура Ходжа (см. [93, 112]). Каждому многообразию ставится в соответствие точка в классифицирующем пространстве всех структур Ходжа. Если многообразие голоморфно зависит от параметров, то имеется голоморфное отображение пространства параметров в классифицирующее пространство структур Ходжа (см. [156, 158, 213]). Это отображение

называется *отображением периодов*. Отображения периодов обладают очень специальными свойствами, связанными с отрицательной искривленностью классифицирующего пространства структур Ходжа. Если пространство параметров семейства многообразий есть проколотый диск, то, изучая асимптотику отображения периодов при стремлении параметра семейства к отмеченной точке диска, можно получить информацию о том, как вырождаются при этом неособые многообразия семейства (см. [158, 213]). К локальной ситуации, указанной в теореме 3, эта теория применяется следующим образом. В качестве представителя ростка $\hat{f}$ берется многочлен P , для которого точка 0 — единственная критическая точка с нулевым критическим значением. Рассматриваются компактификации Y_t в $\mathbb{C}P^n$ гиперповерхностей уровня многочлена (t — значение уровня). Можно выбрать многочлен так, чтобы при малых $t \neq 0$ гиперповерхности Y_t были неособы, а гиперповерхность Y_0 имела единственную особую точку в 0 . Слой X_t расслоения Милнора критической точки 0 многочлена P является частью гиперповерхности Y_t . Можно выбрать многочлен так, чтобы вложение $X_t \hookrightarrow Y_t$ индуцировало эпиморфизм $H^{n-1}(Y_t) \rightarrow H^{n-1}(X_t)$ (для этого надо, чтобы степень многочлена была достаточно велика; см. [211]). Имеется естественное (определенное с точностью до гомотопии) отображение $p: Y_t \rightarrow Y_0$, при котором слой X_t расслоения Милнора отображается в особую точку, см. рис. 80. Согласно точной последовательности пары $X_t \subset Y_t$ имеется изоморфизм

$$\pi: H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0) \rightarrow H^{n-1}(X_t).$$



$p: Y_t \rightarrow Y_0$

Рис. 80.

Из теории деформаций структур Ходжа следует, что на $H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0)$ имеются две естественные фильтрации, называемые весовой и ходжевой, которые обладают свойствами, указанными в формуле (9) (см. [213, 138, 211]). Доказывается, что изоморфизм π переводит эти фильтрации в наши весовую и ходжеву фильтрации (точнее, ходжева фильтрация переходит в ходжеву фильтрацию Стинбинка, см. [20]). Это доказывает теорему 3.

З а м е ч а н и е. Объясним, почему в определении весовой фильтрации в п. 13.2 центральный индекс зависит от собственного числа оператора монодромии.

На пространстве $H^{n-1}(Y_t)$ действует оператор монодромии, индуцированный обходом параметра t вокруг точки $t=0$. По очевидным причинам $p^*H^{n-1}(Y_0)$ принадлежит подпространству собственных векторов с собственным числом 1. Можно доказать, что $p^*H^{n-1}(Y_0)$ совпадает с этим подпространством. Доказательство выводится из теоремы об инвариантных циклах (см. [138, 220]). Нетрудно также вывести это утверждение непосредственно из основной теоремы Шмида в [213] с помощью теоремы 12.1 о детерминанте (ср. с доказательством леммы 2 в [20]).

Упоминавшаяся ранее весовая фильтрация на $H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0)$ индуцируется подходящей фильтрацией на $H^{n-1}(Y_t)$ (см. [211]). Эта фильтрация на $H^{n-1}(Y_t)$ есть весовая фильтрация логарифма унипотентной части оператора монодромии с центральным индексом $n-1$ (она определяется на всех корневых подпространствах одинаково). Поскольку ядро эпиморфизма $H^{n-1}(Y_t) \rightarrow H^{n-1}(X_t)$ есть подпространство инвариантных векторов, проекция в $H^{n-1}(Y_t)$ указанной весовой фильтрации на $H^{n-1}(Y_t)$ совпадает с весовой фильтрацией из п. 13.2.

Д. Первые следствия. Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$ ходжево подпространство $F^k \operatorname{gr}_l W_t$ разлагается в прямую сумму своих пересечений с корневыми подпространствами действия оператора монодромии на $\operatorname{gr}_l W_t$: $F^k \operatorname{gr}_l W_t = \bigoplus_{\lambda} F^k \operatorname{gr} W_{t, \lambda}$, где λ — собственные числа оператора монодромии. Оператор монодромии сохраняет целочисленную структуру пространства $\operatorname{gr}_l W_t$, поэтому сопряжение переставляет корневые пространства, отвечающие числам $\lambda, \bar{\lambda}$. Таким образом, из (9) получаем следствие 1.

Следствие 1. Для любого собственного числа λ

$$\operatorname{gr}_l W_{t, \lambda} = F^k \operatorname{gr}_l W_{t, \lambda} \oplus \overline{F^{l-k+1} \operatorname{gr}_l W_{t, \bar{\lambda}}} \quad (10)$$

Следствие 2 (см. [221]). Размер произвольной жордановой клетки оператора монодромии в когомологиях не больше n . Кроме того, размер не больше $n-1$, если собственное число клетки равно 1.

Пример. Если $n=1$, то все собственные числа оператора монодромии не равны 1, в пространстве исчезающих когомологий существует базис из собственных векторов оператора монодромии (см. пример на стр. 265).

Доказательство следствия 2. Согласно лемме 7 при $k \geq n$ пространство $F^k \operatorname{gr}_l W_t$ нульмерно. Согласно формуле (10) нульмерно пространство $\operatorname{gr}_l W_{t, \lambda}$ при $l \geq 2n-1$, что и требовалось доказать (см. п. В).

Следствие 3. Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$ оператор N индуцирует изоморфизмы

$$N^l: F^k \operatorname{gr}_{n-1+l} W_{t, \lambda} \xrightarrow{\sim} F^{k-l} \operatorname{gr}_{n-1-l} W_{t, \lambda}, \quad (11)$$

если $\lambda \neq 1$,

$$N^l: F^k \operatorname{gr}_{n+l} W_{t, \lambda=1} \xrightarrow{\sim} F^{k-l} \operatorname{gr}_{n-l} W_{t, \lambda=1}, \quad (12)$$

если $\lambda = 1$.

Доказательство следствия 3. Согласно лемме 12 образы левых частей включены в правые. Согласно п. 4 леммы 9 и формуле (10) образы левых частей не могут быть меньше правых.

13.3. Спектр критической точки.

А. Спектральные пары критической точки. Определим неупорядоченный набор из μ пар чисел, который характеризует взаимное расположение весовой и ходжевой фильтраций.

Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ рассмотрим фактор-расслоение

$$\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*) = F^k \operatorname{gr}_l W(f^*) / F^{k+1} \operatorname{gr}_l W(f^*).$$

Согласно лемме 7 на этом расслоении индуцируется действие полупростой части оператора монодромии. Зафиксируем слой этого расслоения и каждому собственному числу λ действия в слое полупростой части поставим в соответствие пару

$$\begin{aligned} (n-1-l_k(\lambda), l), & \quad \text{если } \lambda \neq 1, \\ (n-1-l_k(\lambda), l-1), & \quad \text{если } \lambda = 1; \end{aligned} \quad (13)$$

здесь число $l_k(\lambda)$ определяется условиями: $\exp(2\pi i l_k(\lambda)) = \lambda$, $k \leq \operatorname{Re} l_k(\lambda) < k+1$. Построенный таким образом (для всех k, l, λ) неупорядоченный набор из μ пар чисел называется *набором спектральных пар критической точки* f . Неупорядоченный набор из μ первых чисел пар называется *набором спектральных чисел* (или *спектром*) *критической точки*. Ясно, что эти наборы не зависят от выбора слоя расслоений $\{\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)\}$.

Объясним, почему собственному числу λ ставится в соответствие число $n-1-l_k(\lambda)$, являющееся одним из значений деленного на $2\pi i$ логарифма числа $1/\lambda$. Согласно определению ходжевой фильтрации фактор-расслоение $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$ порождается значениями главных частей форм порядка, не большего чем $n-1-k$. Пусть ω — форма, порядок которой принадлежит $(n-2-k, n-1-k]$ и главная часть которой порождает ненулевое сечение в $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$. Согласно лемме 1 это ненулевое сечение принадлежит корневому подпространству собственного числа $\lambda = \exp(-2\pi i \alpha(\omega))$ действия полупростой части оператора монодромии. Выражая порядок формы ω через λ , получим $n-1-l_k(\lambda) = n-1-k-l_0(\lambda) = \alpha(\omega)$. Таким образом, $n-1-l_k(\lambda)$ — это наименьшее число α , для которого существуют формы порядка α , главные части которых порождают в $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$ корневое подпространство собственного числа λ действия полупростой части оператора монодромии. При этом число α входит в спектр ровно столько раз, какова разность размерностей пространств главных частей форм порядка α и форм порядка $\alpha-1$. Вторые числа спектральных пар указывают, на каких уровнях весовой фильтрации возникают новые главные части. Например, при $k=n-1$

$$F^{n-1}(f^*)/F^n(f^*) = F^{n-1}(f^*),$$

числа $n-1-l_{n-1}(\lambda)$ принадлежат полуинтервалу $(-1, 0]$. Если $\omega_1, \dots, \omega_s$ — голоморфные дифференциальные n -формы неположительных порядков, главные части которых образуют базис сечений расслоения $F^{n-1}(f^*)$, то порядки этих форм составляют часть спектра, принадлежащую $(-1, 0]$.

Обратим внимание на зависимость от собственного числа λ второго числа в характеристической паре; см. (13). В определении весовой фильтрации на корневом подпространстве с собственным

числом 1 индексы были увеличены на 1, чтобы выполнялось утверждение теоремы 3. Теперь в (13) индекс уменьшен на 1. Это уменьшение мотивируется простотой формулировок утверждений именно о таких числах. Например, см. указанные ниже симметрии б), в) спектральных пар.

В заключение приведем еще одно определение спектра.

Лемма 13 (см. [23, 22]). Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n -формы на X . Предположим, что

- 1) сумма порядков этих форм равна $\mu(n/2 - 1)$,
- 2) функция

$$\det^2: t \mapsto \det^2 \left(\int_{\delta_l(t)} \omega_j / df \right), \quad j, l = 1, \dots, \mu,$$

где $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ — базис ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора, имеет при $t = 0$ нуль порядка $\mu(n - 2)$. Тогда порядки $\alpha(\omega_1), \dots, \alpha(\omega_\mu)$ этих форм являются спектром критической точки 0 ростка $\mathbf{f}$.

Доказательство легко вытекает из сравнения леммы 4, теоремы 12.1 о детерминанте и определений ходжевой фильтрации, спектра.

Следствие. Сумма спектральных чисел критической точки ростка $\mathbf{f}$ равна $\mu(n/2 - 1)$.

Отметим, что доказательство этого утверждения не использует теорему о смешанной структуре Ходжа.

Замечание. Из определения спектральных пар легко следует, что сумма всех вторых чисел спектральных пар равна $\mu(n - 1)$.

Б. Числа Ходжа. Аналогично спектральным парам определяются числа Ходжа $h^{k,m}$, $h_\lambda^{k,m}$. Через $h_\lambda^{k,m}$ обозначается размерность корневого подпространства собственного числа λ действия в слое расслоения $\text{gr}^k F \text{gr}_{k+m} W(f^*)$ полупростой части оператора монодромии. Через $h^{k,m}$ обозначается ранг расслоения $\text{gr}^k F \text{gr}_{k+m} W(f^*)$. По определению, $h^{k,m} = \sum_\lambda h_\lambda^{k,m}$. Спектральные

пары и числа Ходжа $h_\lambda^{k,m}$ взаимно определяют друг друга.

Пример 1. Пусть $\mathbf{f} = x^{\mu+1}$. Тогда $h^{0,0} = \mu$; $h_\lambda^{0,0} = 1$ для $\lambda = \exp(2\pi i k / (\mu + 1))$, $k = 1, \dots, \mu$; спектральные пары $-(k/(\mu + 1), 0)$, где $k = 1, \dots, \mu$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{f} = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Тогда $h^{[n/2], [n/2]} = h_{(-1)^n}^{[n/2], [n/2]} = 1$; спектральная пара $-(n/2 - 1, n - 1)$.

В. Симметрии.

Лемма 14 (см. [221, 22]). Для любых k, m имеют место симметрии

$$\text{а) } h_\lambda^{k,m} = h_{\bar{\lambda}}^{m,k},$$

$$\text{б) } h_\lambda^{k,m} = h_\lambda^{n-1-m, n-1-k}, \text{ если } \lambda \neq 1,$$

$$\text{в) } h_1^{k,m} = h_1^{n-m, n-k}.$$

Вывод леммы 14 из теоремы 3 см. в п. 14.2.

Переформулируем эти симметрии в терминах спектральных пар.

а) Число пар, равных (α, l) , равно числу пар, равных $(2n-3-l-\alpha, l)$ (ср. с примерами).

б), в) Число пар, равных (α, l) , равно числу пар, равных $(\alpha+l-n+1, 2n-2-l)$.

Соотношения а) — в) описывают симметрии размерностей пространств главных частей форм фиксированного порядка, являющихся сечениями фиксированного расслоения весовой фильтрации (точнее, описывают симметрии приращений размерностей).

Комбинируя а) с б), в) получаем

С л е д с т в и е. 1. Спектр критической точки расположен симметрично относительно точки $n/2-1$.

2. Комплексный показатель особости (см. п. 13.1.Д) неотрицателен.

Действительно, комплексный показатель особости равен $n/2 - (1 + \alpha_{\min})$, где $\alpha_{\min}$ — наименьшее спектральное число.

Отметим следующее свойство спектра. Если спектр критической точки сосредоточен в точке $n/2-1$, т. е. состоит из нескольких чисел $n/2-1$, то критическая точка невырождена и спектр состоит из одного числа $n/2-1$. Это свойство — прямое следствие теоремы 3.7 о следе оператора монодромии.

Г. Спектр и многогранник Ньютона. Спектр можно выразить через геометрию многогранника Ньютона ряда Тейлора критической точки, если главная часть ряда Тейлора S -невырождена. В работах [221, 7, 56] приведены формулы, выражающие спектр через распределения точек с целыми координатами в конусах, связанных с гранями многогранника Ньютона. Эти формулы доказаны для $n=2$ [221] и для случая «простого» многогранника Ньютона [56]. В общем случае имеется метод вычисления спектра через многогранник Ньютона, не доведенный до формул [56].

Выразим спектр через многогранник Ньютона для $n=2$. Для $n=2$ спектр симметричен относительно точки 0 и лежит в интервале $(-1, 1)$, поэтому достаточно описать часть спектра, принадлежащую интервалу $(-1, 0]$. Согласно п. А для описания этой части спектра достаточно указать формы неотрицательных порядков, главные части которых порождают базис сечений расслоения $F^1(f^*)$, и вычислить порядки указанных форм.

Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки роста $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Назовем одночлен x^m *поддиаграммным*, если вектор $m + (1, \dots, 1)$ не принадлежит внутренности многогранника Ньютона.

Пример. Пусть $\mathbf{f} = x_1^6 + x_1^3 x_2^2 + x_2^5$. На рис. 81 изображены векторы $m + (1, 1)$ для поддиаграммных одночленов x^m .

Каждому поддиаграммному одночлену поставим в соответствие форму $x^m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, которую назовем *поддиаграммной*. Предположим, что главная часть ряда Тейлора критической точки

ростка f $\mathbb{C}$ -невырождена. Тогда порядок каждой поддиаграммной формы неположителен и вычисляется по степени одночлена с помощью теоремы 2 (порядок равен удаленности многогранников ростка f и формы).

В примере порядки поддиаграммных форм равны $-3/5$, $-5/12$, $-3/12$, $-1/12$, $-2/5$, $-1/5$, $-1/5$, 0 , 0 , 0 .

Теорема 4 (см. [22]). Если главная часть ряда Тейлора критической точки ростка $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ $\mathbb{C}$ -невырождена, то главные части поддиаграммных форм образуют базис сечений расслоения $F^{n-1}(f^*)$.

Следствие. Порядки поддиаграммных форм составляют часть спектра критической точки ростка f , принадлежащую интервалу $(-1, 0]$. В частности, для $n=2$ порядки поддиаграммных форм полностью определяют спектр.

Замечания. 1. Для $n=2$ для описания спектра удобно отмечать не только показатели поддиаграммных одночленов, но и показатели симметричных наддиаграммных одночленов. Удаленности пар многогранников ростка f (с $\mathbb{C}$ -невырожденной главной частью) и выделенных одночленов составляют спектр критической точки ростка f . См. рис. 82, где изображены сдвинутые на $(1, 1)$ показатели поддиаграммных и выделенных наддиаграммных одночленов для $f = x_2^9 + x_1^4 x_2^4 + x_1^6 x_2^2 + x_1^{12}$.

2. Следствие теоремы 4 достаточно для описания спектра и при $n=3$. Часть спектра, принадлежащая полуинтервалу $(-1, 0]$, дается следствием. Часть спектра, принадлежащая полуинтервалу $[1, 2)$, определяется симметрией спектра относительно числа $1/2$. Оставшаяся часть спектра принадлежит интервалу $(0, 1)$. Каждое спектральное число — это деленный на $2\pi i$ логарифм собственного числа оператора монодромии. Чтобы описать часть спектра из $(0, 1)$, нужно вычислить по многограннику Ньютона все собственные числа оператора монодромии (см. теорему 3.13 из § 3, [231]), отметить те собственные числа, для которых соответствующие спектральные числа принадлежат объединению $(-1, 0] \cup [1, 2)$, взять такие ветви логарифмов оставшихся собственных чисел, которые после деления на $2\pi i$ попадают в $(0, 1)$. Эти деленные на $2\pi i$ логарифмы образуют оставшуюся часть спектра.

Доказательство теоремы. Главные части поддиаграммных форм линейно независимы, поскольку по теореме 2 поря-

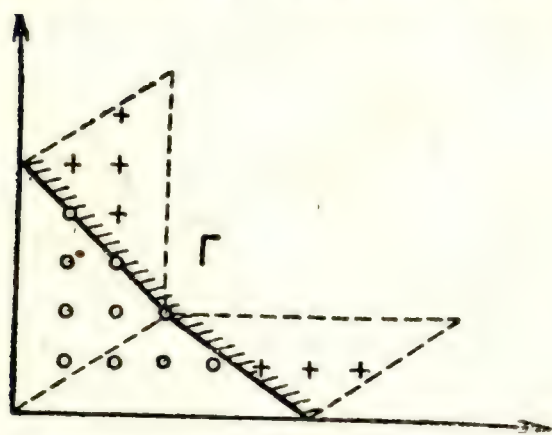


Рис. 81.

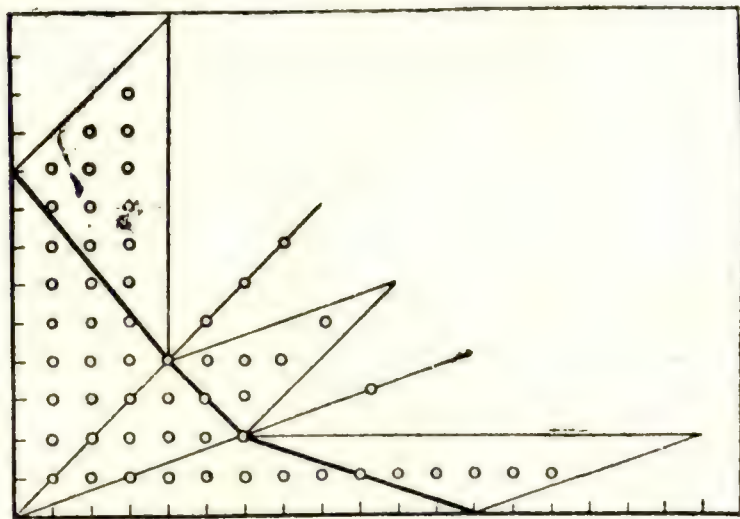


Рис. 82.

док линейной комбинации поддиаграммных форм равен минимуму порядков слагаемых. Главные части поддиаграммных форм образуют базис сечений расслоения $F^{n-1}(f^*)$, поскольку по теореме 2 порядок наддиаграммной формы положителен.

Опишем спектр конечнократной критической точки ростка $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ квазиоднородной функции. Пусть $\mathbf{f}$ имеет тип $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и вес 1. Пусть $\{x^m \mid m \in I\}$ — набор одночленов, проектирующихся в базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Для показателя $m \in I$ положим

$$l(m) = (m_1 + 1)\alpha_1 + \dots + (m_n + 1)\alpha_n - 1.$$

Т е о р е м а 5 ([219], см. также [22]). Числа $l(m)$, $m \in I$, составляют спектр критической точки ростка $\mathbf{f}$ квазиоднородной функции.

Согласно [22] спектр критической точки ростка полуквазиоднородной функции совпадает со спектром критической точки ростка соответствующей квазиоднородной функции.

Для полуквазиоднородного ростка легко указать спектральные пары: все вторые числа спектральных пар равны $n-1$ (см. пример на стр. 265).

Для любого ходжева подрасслоения $F^k(f^*)$ можно указать формы, главные части которых порождают базис сечений этого подрасслоения. А именно, одночлену x^m поставим в соответствие форму

$$\omega_m = x^m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Т е о р е м а 6 (см. [219, 22]). Пусть $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток полуквазиоднородной функции. Тогда

1. Для любого $m \in I$ порядок формы ω_m равен $l(m)$.
2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ главные части форм $\{\omega_m \mid m \in I, l(m) \leq n-1-k\}$ составляют базис сечений ходжева расслоения $F^k(f^*)$.

Приведем таблицу спектров простых, уни- и бимодальных критических точек при $n=3$, составленную В. В. Горюновым [47]. В этой таблице (см. стр. 276) для каждой точки указаны числа N , L_r ; спектр $\{\alpha_r\}$ задается формулой $\alpha_r = (L_r/N) - 1$. В силу симметрии относительно числа $1/2$ все спектры, кроме спектров точек A_μ , D_μ , $T_{p,q,t}$, выписаны до половины, т. е. при $r \leq \mu/2$. Обозначения критических точек см. в ОДО-1.

Д. Спектр прямой суммы критических точек равен сумме спектров, сдвинутой на 1. Пусть $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $\mathbf{g}: (\mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — ростки голоморфных функций в конечнократных критических точках кратностей соответственно μ , η . Рассмотрим прямую сумму этих ростков $\mathbf{f} + \mathbf{g}: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Росток $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ имеет в 0×0 критическую точку кратности $\mu \cdot \eta$.

Т е о р е м а 7 (см. [22]). Если $\{\alpha_i\}$ — спектр критической точки ростка $\mathbf{f}$, $\{\beta_j\}$ — спектр критической точки ростка $\mathbf{g}$, то $\{\alpha_i + \beta_j + 1\}$ — спектр критической точки ростка $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ (здесь $i = 1, \dots, \mu$, $j = 1, \dots, \eta$).

Класс	N	$\{L_r\}$	Класс	N	$\{L_r\}$
A_μ	$\mu+1$	$\mu+1+k \quad 1 \leq k \leq \mu$	E_6	12	13 16 17
D_μ	$2\mu-2$	$3\mu-3 \quad 2\mu-1+2k$ $0 \leq k \leq \mu-2$	E_7	18	19 23 25
			E_8	30	31 37 41 43
P_8	3	3 4 4 4	Z_{12}	22	21 25 27 29 31 33
X_9	4	4 5 5 6	Z_{13}	18	17 20 22 23 25 26
J_{10}	6	6 7 8 8 9	W'_{12}	20	19 23 24 27 28 29
Q_{10}	24	23 29 31 32 35	W_{13}	16	15 18 19 21 22 23
Q_{11}	18	17 21 23 24 25	E_{12}	42	41 47 53 55 59 61
Q_{12}	15	14 17 19 20 20 22	E_{13}	30	29 33 37 39 41 43
S_{11}	16	15 19 20 21 23	E_{14}	24	23 26 29 31 32 34 35
S_{12}	13	12 15 16 17 18 19	$T_{p,q,t}$	pqt	$pqt \quad 2pqt \quad (p+k_1)qt$ $(q+k_2)pt \quad (t+k_3)pq$ $0 < k_1 < p \quad 0 < k_2 < q \quad 0 < k_3 < t$
U_{12}	12	11 14 15 15 17 18			
Z_{11}	30	29 35 37 41 45			

$J_{3,p}$	$18 (p+9)$	$17 (p+9) \quad 23 (p+9) \quad 25 (p+9) \quad 9 (2p+17+2k)$ $1 \leq k \leq (p+10)/2$
$Z_{1,p}$	$14 (p+7)$	$13 (p+7) \quad 17 (p+7) \quad 19 (p+7) \quad 21 (p+7) \quad 7 (2p+13+2k)$ $1 \leq k \leq (p+7)/2$
$W_{1,p}$	$12 (p+6)$	$11 (p+6) \quad 14 (p+6) \quad 16 (p+6) \quad 17 (p+6) \quad 6 (2p+11+2k)$ $1 \leq k \leq (p+7)/2$
$W_{1,p}^\#$	$12 (p+12)$	$11 (p+12) \quad 17 (p+12) \quad 12 (p+12+k) \quad 1 \leq k \leq (p+11)/2$
$Q_{2,p}$	$12 (p+6)$	$11 (p+6) \quad 15 (p+6) \quad 16 (p+6) \quad 17 (p+6) \quad 6 (2p+11+2k)$ $1 \leq k \leq (p+6)/2$
$S_{1,p}$	$10 (p+5)$	$9 (p+5) \quad 12 (p+5) \quad 13 (p+5) \quad 14 (p+5) \quad 5 (2p+9+2k)$ $1 \leq k \leq (p+6)/2$
$S_{1,p}^\#$	$10 (p+10)$	$9 (p+10) \quad 13 (p+10) \quad 10 (p+10+k) \quad 1 \leq k \leq (p+10)/2$
$U_{1,p}$	$9 (p+9)$	$8 (p+9) \quad 11 (p+9) \quad 13 (p+9) \quad 9 (p+9+k) \quad 1 \leq k \leq (p+8)/2$

Q_{16}	21	19 22 25 26 28 28 29 31	
Q_{17}	30	27 31 35 37 39 40 41 43	
Q_{18}	48	43 49 55 59 61 64 65 67 71	
S_{16}	17	15 18 20 21 22 23 24 25	
S_{17}	24	21 25 28 29 31 32 33 35	
U_{16}	15	13 16 18 18 19 21 21 22	
W_{17}	20	18 21 23 24 26 27 28 29	
W_{18}	28	25 29 32 33 36 37 39 40 41	
Z_{17}	24	22 25 28 29 31 32 34 35	
Z_{18}	34	31 35 39 41 43 45 47 49 51	
Z_{19}	54	49 55 61 65 67 71 73 77 79	
E_{18}	30	28 31 34 37 38 40 41 43 44	
E_{19}	42	39 43 47 51 53 55 57 59 61	
E_{20}	66	61 67 73 79 83 85 89 91 95 97	

Следствие 1. Если $\{\alpha_i\}$ — спектр критической точки ростка $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, то $\{\alpha_i + 1/2\}$ — спектр критической точки ростка $\mathbf{f} + \mathbf{z}^2: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Следствие 2. Комплексные показатели особости равны у стабильно эквивалентных критических точек.

Доказательство теоремы использует комплексные осциллирующие интегралы с фазами $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ и теорему Фубини для таких интегралов. Используем обозначения п. 11.3.

В п. 11.3 указано отображение тензорного произведения групп допустимых цепей для критических точек ростков $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ в группу допустимых цепей для критической точки ростка $\mathbf{f} + \mathbf{g}$:

$$H_n(X^{\mathbf{f}}, X^{-, \mathbf{f}}; \mathbb{C}) \otimes H_l(X^{\mathbf{g}}, X^{-, \mathbf{g}}; \mathbb{C}) \rightarrow H_{n+l}(X^{\mathbf{f}+\mathbf{g}}, X^{-, \mathbf{f}+\mathbf{g}}; \mathbb{C}).$$

Лемма 15. Это отображение — изоморфизм.

Доказательство. Обозначим отображение через h . Пусть $\delta_1, \dots, \delta_\mu \in H_n(X^{\mathbf{f}}, X^{-, \mathbf{f}})$, $\gamma_1, \dots, \gamma_\eta \in H_l(X^{\mathbf{g}}, X^{-, \mathbf{g}})$ — базисы. Достаточно предъявить на $X^{\mathbf{f}+\mathbf{g}}$ $\mu \cdot \eta$ голоморфных дифференциальных $(n+l)$ -форм $\psi_1, \dots, \psi_{\mu\eta}$, для которых $\det \left(\int_{h(\delta_i \otimes \gamma_j)} e^{\tau(\mathbf{f}+\mathbf{g})} \psi_s \right) \neq 0$.

По теореме о детерминанте существуют n -формы $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ на $X^{\mathbf{f}}$, для которых $\det \left(\int_{\delta_i} e^{\tau \mathbf{f}} \omega_s \right) \neq 0$ (см. лемму 11.2). Аналогично суще-

ствуют l -формы $\varphi_1, \dots, \varphi_\eta$ на $X^{\mathbf{g}}$, для которых $\det \left(\int_{\gamma_j} e^{\tau \mathbf{g}} \varphi_s \right) \neq 0$.

В качестве форм $\{\psi_s\}$ можно взять формы $\{\omega_i \wedge \varphi_j\}$, см. теорему Фубини 11.4. Лемма доказана.

В п. 11.1 построен изоморфизм $H_{n-1}(X_t^{\mathbf{f}}) \cong (X^{\mathbf{f}}, X^{-, \mathbf{f}})$ для любого $t \in S^-$. Согласно лемме 15 этот изоморфизм индуцирует изоморфизм $H_{n-1}(X_t^{\mathbf{f}}) \otimes H_{l-1}(X_t^{\mathbf{g}}) \cong H_{n+l-1}(X_t^{\mathbf{f}+\mathbf{g}})$ для любого $t \in S^-$. Легко видеть, что этот изоморфизм распространяется до изоморфизма гомологических расслоений

$$\mathbf{f}_* \otimes \mathbf{g}_* \cong (\mathbf{f} + \mathbf{g})_* \quad (14)$$

($*$ означает гомологическое расслоение Милнора). Для этого надо рассматривать не пару $X^{\mathbf{f}}, X^{-, \mathbf{f}}$, а пары $X^{\mathbf{f}}, X \cap \mathbf{f}^{-1}(\{t \in S \mid \operatorname{Re}(e^{i\varphi} t) < 0\})$; аналогичные изменения нужно внести в пары $(X^{\mathbf{g}}, X^{-, \mathbf{g}})$, $(X^{\mathbf{f}+\mathbf{g}}, X^{-, \mathbf{f}+\mathbf{g}})$. При указанном изоморфизме расслоений тензорные произведения ковариантно постоянных сечений ковариантно постоянны, т. е. связность Гаусса—Манина в расслоении $(\mathbf{f} + \mathbf{g})_*$ изоморфна $\nabla^{\mathbf{f}} \otimes \operatorname{id}^{\mathbf{g}} + \operatorname{id}^{\mathbf{f}} \otimes \nabla^{\mathbf{g}}$ — тензорному произведению связностей Гаусса—Манина расслоений $\mathbf{f}_*$, $\mathbf{g}_*$.

Если ω — голоморфная дифференциальная n -форма на $X^{\mathbf{f}}$, φ — голоморфная дифференциальная l -форма на $X^{\mathbf{g}}$, то $\omega \wedge \varphi$ — голоморфная дифференциальная $(n+l)$ -форма в окрестности точки $0 \times 0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l$. Лемма 15 позволяет выразить геометрическое сечение формы $\omega \wedge \varphi$ через геометрические сечения форм ω , φ .

Лемма 16 (см. [22]). Если

$$\begin{aligned} s[\omega] &= \sum t^\alpha (\ln t)^k A_{k, \alpha}^\omega / k!, \\ s[\varphi] &= \sum t^\beta (\ln t)^s A_{s, \beta}^\varphi / s!, \end{aligned}$$

то

$$s[\omega \wedge \varphi] = \sum \sum \frac{\partial^{k+s}}{\partial \alpha^k \partial \beta^s} [t^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1)] A_{k, \alpha}^\omega \otimes A_{s, \beta}^\varphi / (k! s!),$$

где B — бэта-функция.

Замечание. Сечения $A_{k, \alpha}^\omega \otimes A_{s, \beta}^\varphi$ рассматриваются как сечения расслоения $(f+g)_*$ в силу изоморфизма (14).

Лемма 16 следует из леммы 11.2 и теоремы Фубини.

Следствие. Порядок формы $\omega \wedge \varphi$ равен увеличенной на 1 сумме порядков форм ω, φ .

Теперь для доказательства теоремы 7 достаточно воспользоваться леммой 13. А именно, пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные n -формы на X^f , которые вместе с f удовлетворяют условиям леммы 13. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_\eta$ — голоморфные l -формы на X^g , которые вместе с g удовлетворяют условиям леммы 13. Нетрудно убедиться, что формы $\{\omega_i \wedge \varphi_j\}$ вместе с $f+g$ тоже удовлетворяют условиям леммы 13. Следовательно, порядки этих форм (числа $\alpha(\omega_i) + \alpha(\varphi_j) + 1$) составляют спектр критической точки ростка $f+g$.

Аккуратное проведение этих рассуждений позволяет доказать следующее усиление теоремы 7: если $\{(\alpha_i, v_i)\}$ — спектральные пары ростка f , $\{(\beta_j, u_j)\}$ — спектральные пары ростка g , то $\{(\alpha_i + \beta_j + 1, v_i + u_j + 1)\}$ — спектральные пары ростка $f+g$.

В [22] указаны явные формулы, связывающие с помощью операций тензорных произведений и сумм весовые и ходжевы фильтрации когомологических расслоений Милнора критических точек ростков $f, g, f+g$.

§ 14. Смешанная структура Ходжа изолированной критической точки голоморфной функции

Смешанная структура Ходжа в векторном пространстве — это две фильтрации пространства, удовлетворяющие указанным ниже аксиомам. В пространстве когомологий, исчезающих в критической точке голоморфной функции, имеется естественная смешанная структура Ходжа. Роль упомянутых фильтраций играют весовая и ходжева фильтрации, введенные в § 13. Весовая фильтрация строится по жордановой структуре оператора монодромии и отражает поведение интегралов по исчезающим циклам при аналитическом продолжении интегралов вокруг критического значения параметра. Ходжева фильтрация строится, исходя из сравнений скоростей стремления к нулю интегралов по исчезающим циклам при стремлении параметра интегралов к критическому значению. Как известно, в геометрии есть две теории, изучающие функцию в окрестности

критической точки: теория Морса и теория Пикара — Лефшеца. Теория Морса исследует перестройку гиперповерхности уровня функции при стремлении уровня к критическому значению. Теория Пикара — Лефшеца исследует преобразование гиперповерхности уровня функции при обходе уровня на комплексной прямой вокруг критического значения. В этом смысле теория смешанных структур Ходжа критических точек является синтезом теории Морса и теории Пикара — Лефшеца. Смешанная структура Ходжа в исчезающих когомологиях играет заметную роль в локальной теории особенностей.

В этом параграфе обсуждается взаимодействие смешанной структуры Ходжа с другими характеристиками критической точки.

14.1. Определение смешанной структуры Ходжа. Смешанная структура Ходжа — это дополнительная структура, имеющаяся в когомологиях комплексного многообразия и индуцированная комплексной структурой многообразия.

Пример. Рассмотрим комплексную неособую проективную кривую $X \subset \mathbb{C}P^2$ рода 1, в аффинной карте заданную уравнением $y^2 = P_3(x)$, где P_3 — многочлен третьей степени без кратных корней.

Рассмотрим ее когомологии с комплексными коэффициентами. Размерности пространств $H^0(X, \mathbb{C})$, $H^1(X, \mathbb{C})$, $H^2(X, \mathbb{C})$ равны соответственно 1, 2, 1. В каждом из этих пространств задано вещественное подпространство — образ естественного вложения когомологий с вещественными коэффициентами. Более того, в вещественном подпространстве выделена целочисленная решетка — образ естественного вложения когомологий с целыми коэффициентами. Вещественное подпространство с решеткой есть всегда в когомологиях с комплексными коэффициентами. Следующий объект — проявление комплексной структуры на X . Рассмотрим на X дифференциальную 1-форму $\omega = dx/y$. Легко убедиться, что всюду на X ω — регулярная голоморфная 1-форма. Форма ω замкнута и, следовательно, определяет класс когомологий $[\omega] \in H^1(X, \mathbb{C})$. Всякая иная голоморфная 1-форма ω' пропорциональна ω (действительно, ω'/ω — ограниченная голоморфная функция и, следовательно, постоянная). Комплексная структура задает ориентацию кривой. Для этой ориентации $i \int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0$. В частности, это

означает, что класс $[\omega]$ отличен от нуля. Таким образом, голоморфные дифференциальные 1-формы на X порождают в $H^1(X, \mathbb{C})$ одномерное подпространство F , это подпространство обладает свойством $H^1(X, \mathbb{C}) = F \oplus \bar{F}$, где черта означает сопряжение относительно вещественного подпространства.

Стандартная теорема теории эллиптических кривых утверждает (см. [73, 115]): векторное пространство H^1 вместе с указанными структурами (вещественным подпространством с целочисленной решеткой и подпространством F) определяют кривую X .

Предположим, что имеются две кривые X, X' рода 1 и голоморфное отображение $f: X \rightarrow X'$. Рассмотрим индуцированное отображение $f^*: H^1(X', \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C})$. Очевидно, что при этом отображении вещественное подпространство и целочисленная решетка переходят соответственно в вещественное подпространство и целочисленную решетку. Более того, поскольку прообраз голоморфной формы голоморфен, $f^*F \subset F$. Это замечание показывает функториальность описанной выше структуры в когомологиях и несет нетривиальную информацию о голоморфных отображениях. Например, если нет ненулевого линейного отображения $(H^1(X', \mathbb{C}), F) \rightarrow (H^1(X, \mathbb{C}), F)$, сохраняющего вещественное подпространство и целочисленную решетку, то всякое голоморфное отображение $X \rightarrow X'$ есть отображение в точку.

Конструкция подпространства F в одномерных когомологиях кривой рода 1 обобщается на комплексное неособое проективное многообразие X произвольной размерности [93, 112]. Для любого неотрицательного целого l в пространстве когомологий $H^l(X, \mathbb{C})$, помимо вещественного подпространства с целочисленной решеткой, выделим подпространства $H^{l,0}, H^{l-1,1}, \dots, H^{0,l}$, где $H^{k,l-k}$ — подпространство всех l -мерных классов когомологий, представимых замкнутыми дифференциальными формами, которые в каждой локальной записи

$$\sum a_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{l-r}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{l-r}}$$

в каждом слагаемом имеют ровно k голоморфных дифференциалов и ровно $l-k$ антиголоморфных дифференциалов, т. е. в каждом слагаемом $r=k$. Теорема Ходжа (см. [93, 112]) утверждает, что

$$H^l(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_k H^{k, l-k}, \quad \overline{H^{k, l-k}} = H^{l-k, k}. \quad (1)$$

Как и в случае кривых, подпространства $H^{k, l-k}$ несут значительную информацию о разнообразных характеристиках многообразия (см. [93, 112, 156, 145, 101]). Очевидно, что подпространства $H^{k, l-k}$ сохраняются голоморфными отображениями многообразий: если $f: X \rightarrow X'$ — голоморфное отображение, то для любого k $f^*(H^{k, l-k}) \subset H^{k, l-k}$.

При исследовании зависимости разложения (1) от комплексной структуры на X , а также при обобщении конструкции на многообразия с особенностями выяснилось, что правильным объектом является не последовательность подпространств $H^{l,0}, \dots, H^{0,l}$, а последовательность подпространств

$$\{0\} \subset F^l \subset F^{l-1} \subset \dots \subset F^0 = H^l(X, \mathbb{C}),$$

где $F^k = H^{l,0} \oplus H^{l-1,1} \oplus \dots \oplus H^{k, l-k}$.

П. Делинь [145] выделил в когомологиях квазипроективного алгебраического многообразия (с любыми особенностями) две естественных фильтрации: ходжеву $\{F^k\}$ и весовую $\{W_l\}$, и дока-

зал, что эти фильтрации обладают свойством, обобщающим свойство (1), и функториальны относительно алгебраических отображений многообразий. Эти фильтрации названы Делинем смешанной структурой Ходжа в когомологиях. Свойства этих фильтраций взяты за основу приведенных ниже формальных определений.

Замечание. В приведенных выше примерах многообразия были неособыми и компактными. Для неособого компактного многообразия весовая фильтрация тривиальна: $\{0\} = W_{l-1} \subset W_l = H^l(X, \mathbb{C})$.

В исчезающих когомологиях смешанная структура Ходжа определена Дж. Стинбринком в [221].

А. Структуры Ходжа (см. [158]). Пусть $H_{\mathbb{R}}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, содержащее решетку $H_{\mathbb{Z}}$, и пусть $H = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ — его комплексификация.

Определение. Структура Ходжа веса l на H состоит из разложения в прямую сумму $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$, причем $H^{k,m} = \overline{H^{m,k}}$ (черта означает сопряжение). Числа $h^{k,m} = \dim_{\mathbb{C}} H^{k,m}$ называются числами Ходжа.

Для любых двух структур Ходжа H, H' веса l прямая сумма $H \oplus H'$ несет очевидную структуру Ходжа веса l . Аналогично, если H и H' имеют (возможно разные) веса l и l' , то $H \otimes H'$, $\text{Hom}(H, H')$, $\Lambda^p H$, H^* наследуют структуры Ходжа соответственно весов $l+l'$, $l'-l$, pl , $-l$. А именно, $\lambda \in \text{Hom}(H, H')$ имеет тип (k, m) , если для всех r, s $\lambda(H^{r,s}) \subset (H')^{k+r, m+s}$. В частности, это определение применяется к $H^* = \text{Hom}(H, \mathbb{C})$, где $\mathbb{C}$ несет тривиальную структуру веса 0; $H \otimes H'$ можно рассматривать как $\text{Hom}(H^*, H')$, и $\bigotimes^p H$ индуцирует структуру Ходжа на своем подпространстве $\Lambda^p H$.

Определение. Линейное отображение $\varphi: H \rightarrow H'$ векторных пространств со структурами Ходжа называется морфизмом типа (r, r) , если оно определено над $\mathbb{Q}$ по отношению к решеткам $H_{\mathbb{Z}}, H'_{\mathbb{Z}}$ и если $\varphi(H^{k,m}) \subset (H')^{k+r, m+r}$ для всех k, m .

Замечание. Отображение φ определено над $\mathbb{Q}$ по отношению к решеткам $H_{\mathbb{Z}}, H'_{\mathbb{Z}}$, если рациональны элементы его матрицы в базисах, состоящих из векторов решеток.

С каждой структурой Ходжа $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$ веса l связана фильтрация Ходжа

$$\{0\} \subset \dots \subset F^{k+1} \subset F^k \subset F^{k-1} \subset \dots \subset H,$$

где $F^k = \bigoplus_{i \geq k} H^{i, l-i}$ (см. рис. 83). Фильтрация Ходжа определяет структуру Ходжа:

$$H^{k,m} = F^k \cap \overline{F^m}. \quad (2)$$

Обратно, убывающая фильтрация $\{F^k\}$ на H возникает из некоторой структуры Ходжа веса l тогда и только тогда, когда $F^k \oplus \overline{F^{l-k+1}} = H$ для всех k .

В терминах нового описания линейное отображение $\varphi: H \rightarrow H'$, определенное над $\mathbb{Q}$, является морфизмом типа (r, r) , если и только

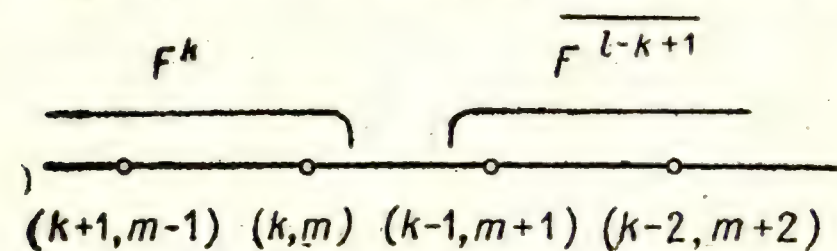


Рис. 83.

если оно сохраняет ходжеву фильтрацию со сдвигом индексов на r : $\varphi(F^k) \subset F'^{k+r}$ для всех k .

Рассмотрим структуру Ходжа $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$ и билинейную

форму S на H . Предположим, что значения формы на парах векторов решетки $H_{\mathbb{Z}}$ рациональны. Предположим также, что форма симметрична, если l четно, и кососимметрична, если l нечетно.

Определение. Структура Ходжа поляризована формой S , если

$$\begin{aligned} S(H^{k,m}, H^{k',m'}) &= 0 \quad \text{при } (k,m) \neq (m,k), \\ (\sqrt{-1})^{k-m} S(v, \bar{v}) &> 0 \quad \text{для } v \in H^{k,m}, \quad v \neq 0. \end{aligned}$$

Примером поляризации структуры Ходжа служит билинейная форма Ходжа на примитивных когомологиях гладкого проективного многообразия (см. [93, гл. V]).

Б. Смешанные структуры Ходжа (см. [158]). Пусть $H, H_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{Z}}$ — те же, что и в п. А.

Определение. Смешанная структура Ходжа на H состоит из двух фильтраций:

$$\{0\} \subset \dots \subset W_{l-1} \subset W_l \subset W_{l+1} \subset \dots \subset H$$

— *весовой* фильтрации, определенной над $\mathbb{Q}$ по отношению к решетке $H_{\mathbb{Z}}$,

$$\{0\} \subset \dots \subset F^{k+1} \subset F^k \subset F^{k-1} \subset \dots \subset H$$

— *ходжевой* фильтрации. Требуется, чтобы при любом l фильтрация на

$$\text{gr}_l W = W_l / W_{l-1},$$

индуцированная ходжевой фильтрацией, составляла на $\text{gr}_l W$ чистую структуру Ходжа веса l (индуцированная фильтрация — это фильтрация

$$F^k \text{gr}_l W = (F^k \cap W_l + W_{l-1}) / W_{l-1}.$$

Другими словами, требуется, чтобы при любых $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\text{gr}_l W = F^k \text{gr}_l W \oplus \overline{F^{l-k+1} \text{gr}_l W}.$$

Ср. с утверждением теоремы 13.3.

Понятие смешанной структуры Ходжа содержит понятие структуры Ходжа в качестве частного случая: если $(H, \{F^k\})$ — структура Ходжа веса l , возьмем в качестве весовой фильтрации $\{0\} = W_{l-1} \subset W_l = H$, тогда $(H, \{F^k\}, \{W_m\})$ — смешанная структура Ходжа.

Определение. Морфизмом типа (r, r) смешанных структур Ходжа $(H, \{F^k\}, \{W_l\})$, $(H', \{F'^k\}, \{W'_l\})$ называется линейное отображение $\varphi: H \rightarrow H'$, определенное над $\mathbb{Q}$ по отношению к решеткам $H_{\mathbb{Z}}$, $H'_{\mathbb{Z}}$ и обладающее свойствами:

$$\varphi(W_l) \subset W'_{l+2r}, \quad \varphi(F^k) \subset F'^{k+r}$$

для любых l, k .

Морфизм типа (r, r) индуцирует отображение

$$\varphi: \operatorname{gr}_l W \rightarrow \operatorname{gr}_{l+2r} W',$$

являющееся морфизмом типа (r, r) чистых структур Ходжа весов $l, l+2r$ соответственно.

На смешанные структуры Ходжа естественным образом распространяются операции прямой суммы, тензорного произведения, сопряжения.

Пример. Если $(H, \{F^k\}, \{W_l\})$ — смешанная структура Ходжа, определим смешанную структуру Ходжа на сопряженном пространстве H^* . Положим $H^*_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Hom}(H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$, $(F^*)^k = \operatorname{ann} F^{1-k}$, $W^*_l = \operatorname{ann} W_{-l-1}$, где ann — аннулятор.

14.2. Обсуждение утверждения теоремы 13.3 о смешанной структуре Ходжа.

А. Примеры.

Критическая точка роста $\mathbf{f}: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции одной переменной. После подходящей замены переменной имеем $\mathbf{f} = x^{\mu+1}$, где μ — кратность критической точки. Пусть $f: X \rightarrow S$ — специализация роста, $f^*: H^0 \rightarrow S'$ — соответствующее кохомологическое расслоение Милнора (стр. 250). Согласно примерам на стр. 262, 265 для любого $t \in S'$

$$\{0\} = W_{-1, t} \subset W_{0, t} = \tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C}),$$

$$\{0\} = F_t^1 \subset F_t^0 = \tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C}).$$

$\operatorname{gr}_0 W_t = \tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C})$ — единственное нетривиальное факторпространство весовой фильтрации. На $\tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C})$ ходжева фильтрация индуцирует чистую структуру Ходжа веса 0: $\tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C}) = H_t^{0,0}$, где $H_t^{0,0} = F_t^0 \cap \bar{F}_t^0$ (см. формулу (1)). Теорема 13.3 для $\mathbf{f}$ доказана.

Невырожденная критическая точка роста $\mathbf{f} = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Согласно примерам на стр. 262, 265 для

любого $t \in S'$

$$\{0\} = W_{2[n/2]-1, t} \subset W_{2[n/2], t} = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}),$$

$$\{0\} = F_t^{[n/2]+1} \subset F_t^{[n/2]} = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}).$$

$\text{gr}_{2[n/2]} W_t = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ — единственное нетривиальное факторпространство весовой фильтрации. На $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ ходжева фильтрация индуцирует чистую структуру Ходжа веса $2[n/2]$: $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}) = H_t^{[n/2], [n/2]}$, где $H_t^{[n/2], [n/2]} = F_t^{[n/2]} \cap \overline{F_t^{[n/2]}}$ (см. формулу (2)). Теорема 13.3 для $\mathbf{f}$ доказана.

Конечнократная критическая точка роста $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции двух переменных. Это — первый нетривиальный случай. Переформулируем для этого случая утверждения теоремы о смешанной структуре Ходжа. Пусть $f: X \rightarrow S$ — специализация роста $\mathbf{f}$, $t \in S'$. Согласно лемме 13.7 ходжева фильтрация имеет вид

$$\{0\} \subset F_t^1 \subset F_t^0 \subset \dots \subset H^1(X_t, \mathbb{C}).$$

Согласно следствию 2 в п. 13.2 размеры жордановых клеток оператора монодромии не больше 2, корневое подпространство собственного числа 1 оператора монодромии состоит из собственных векторов. Поэтому весовая фильтрация имеет вид

$$\{0\} \subset W_{0, t} \subset W_{1, t} \subset W_{2, t} = H^1(X_t, \mathbb{C}),$$

где $W_{1, t}$ порождено всеми собственными векторами оператора монодромии с собственными числами, не равными 1, $W_{0, t}$ порождено собственными векторами жордановых клеток размера 2.

Теорема о смешанной структуре Ходжа утверждает, что ходжева фильтрация индуцирует на факторпространствах весовой фильтрации чистые структуры Ходжа, т. е. в данном случае

$$\text{gr}_2 W_t = H_t^{1, 1}, \quad (3)$$

$$\text{gr}_1 W_t = H_t^{1, 0} \oplus H_t^{0, 1}, \quad \text{gr}_0 W_t = H_t^{1, -1} \oplus H_t^{0, 0} \oplus H_t^{-1, 1}, \quad (4)$$

где $H^{k, m} = F^k \text{gr}_{k+m} W \cap \overline{F^m \text{gr}_{k+m} W}$. Согласно следствию 3 в п. 13.2.Д $H_t^{1, -1}$, $H_t^{-1, 1}$ пусты и

$$\text{gr}_0 W_t = H_t^{0, 0}. \quad (5)$$

Следствие. $F_t^0 = H^1(X_t, \mathbb{C})$. Другими словами, произвольный класс исчезающих когомологий, принадлежащий одному из корневых пространств оператора монодромии, является значением главной части голоморфной 2-формы на X , порядок которой меньше чем 1.

Замечание. Для роста функции n переменных $F_t^0 = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$. Доказательство аналогично.

Утверждения (3) — (5) можно переформулировать на языке главных частей голоморфных 2-форм на X .

а) Каждый собственный вектор из $W_{0,t}$ есть значение главной части некоторой формы порядка, принадлежащего интервалу $(0, 1)$.

б) Если порядок формы не больше 0, то значение в t главной части формы не принадлежит $W_{0,t}$.

в) Каждый собственный вектор с собственным числом 1 есть значение главной части некоторой формы порядка 0.

г) Каждый собственный вектор из $W_{0,t}$ есть значение коэффициента $A_{1,\alpha(\omega)}^\omega$, где ω — некоторая голоморфная 2-форма на X , порядок которой $\alpha(\omega)$ принадлежит интервалу $(-1, 0)$.

д) Обозначим через $\mathcal{F}_t^1$ проекцию в $\text{gr}_1 W_t$ подпространства в $W_{1,t}$, порожденного значениями в t главных частей форм порядка, меньшего чем 0. Тогда $\text{gr}_1 W_t = \mathcal{F}_t^1 \oplus \overline{\mathcal{F}_t^1}$.

Из а) — д), в частности, легко выводится, что всякое элементарное сечение неотрицательного порядка есть геометрическое сечение некоторой 2-формы. Например, если $A: t \mapsto A(t)$ — ковариантно постоянное однозначное сечение кохомологического расслоения Милнора, то существует 2-форма ω , для которой $[\omega/df|_{x_t}] = A(t)$ для любого t .

Б. Симметрия чисел Ходжа. Выведем лемму 13.14 из теоремы 13.3. Согласно теореме 13.3 для любого l

$$\text{gr}_l W_t = \bigoplus_{k+m=l} H_t^{k,m}, \quad H^{k,m} = \overline{H^{m,k}}. \quad (6)$$

Оператор монодромии на $\text{gr}_l W_t$ сохраняет вещественную структуру и индуцированную ходжеву фильтрацию. Поэтому оператор монодромии сохраняет разложение (6). Обозначим через $H_\lambda^{k,m}$ корневое подпространство собственного числа λ действия монодромии на $H^{k,m}$.

По построению $F^k \text{gr}_l W_t = H^{k,l-k} \oplus H^{k+1,l-k-1} \oplus \dots$. Поэтому $H^{k,l-k} \cong F^k \text{gr}_l W_t / F^{k+1} \text{gr}_l W_t$, $\dim H^{k,l-k} = h^{k,l-k}$, $\dim H_\lambda^{k,l-k} = h_\lambda^{k,l-k}$. Теперь утверждение а) леммы 13.14 следует из (6).

Согласно следствию 2 в п. 13.2.Д для любых k, l

$$N^l(H_\lambda^{k,n-1+l-k}) = H_\lambda^{k-l,n-1-k}, \text{ если } \lambda \neq 1, \\ N^l(H_1^{k,n+l-k}) = H_1^{k-l,n-k}.$$

Это влечет утверждения б), в) леммы 13.14.

В. Фунториальность смешанной структуры Ходжа в исчезающих кохомологиях. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий конечнократную критическую точку. Пусть $g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ — росток конечнократного голоморфного отображения. Предположим, что росток $f \circ g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ тоже имеет конечнократную критическую точку. Росток g индуцирует отображение гиперповерхности уровня ростка $f \circ g$ в гиперповерхность того же уровня ростка f . Нетрудно убедиться, что это отображение задает линейное отображение g^* кохомологий, исчезающих в критической точке ростка f , в кого-

мологии, исчезающие в критической точке ростка $\mathbf{f} \circ g$, точнее, задает морфизм когомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\mathbf{f}$ в когомологическое расслоение Милнора критической точки ростка $\mathbf{f} \circ g$. Согласно теореме 13.3 в слоях этих когомологических расслоений весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа.

Теорема 1 (см. [22]). g^* — *мономорфизм типа $(0, 0)$ смешанных структур Ходжа*. А именно, g^* не имеет ядра и для любых k, l

$$g^*(F^k(f^*)) \subset F^k((f \circ g)^*), \quad g^*(W_l(f^*)) \subset W_l((f \circ g)^*).$$

Доказательство. Пусть X_t^f, X_t^{fg} — слои расслоений Милнора ростков $\mathbf{f}, \mathbf{f} \circ g$ соответственно. Предположим, что специализации ростков и представитель g ростка g выбраны так, что $g(X_t^{fg}) \subset X_t^f$.

Отображение $g_*: H_{n-1}(X_t^{fg}, \mathbb{C}) \rightarrow H_{n-1}(X_t^f, \mathbb{C})$ эпиморфно. Действительно, если $[\sigma] \in H_{n-1}(X_t^f, \mathbb{C})$, σ — представитель класса $[\sigma]$, $\{g^{-1}(\sigma)\}$ — полный прообраз цикла σ в X_t^{fg} , то $g_*[\{g^{-1}(\sigma)\}] = k[\sigma]$, где k — кратность ростка g .

Докажем функториальность весовой фильтрации. Очевидно, что отображение g^* переводит ковариантно постоянные сечения в ковариантно постоянные сечения. Кроме того, отображение g^* перестановочно с оператором монодромии. Согласно второму определению весовой фильтрации в п. 13.2.Б это означает справедливость второго включения теоремы.

Докажем функториальность ходжевой фильтрации. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X^f . Очевидно, что порядок формы $g^*(\omega)$ равен порядку формы ω . Более того, главная часть формы $g^*(\omega)$ равна образу главной части формы относительно мономорфизма g^* . Это доказывает первое включение теоремы.

Замечание. Другим проявлением функториальности смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях являются формулы, связывающие спектры критических точек ростков $\mathbf{f}(x), g(y), \mathbf{f}(x) + g(y)$; см. п. 13.3.Д, а также [22].

Г. Переформулировка теоремы о смешанной структуре Ходжа на язык комплексных осциллирующих интегралов. Пусть $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в конечнократной критической точке. Рассмотрим комплексные осциллирующие интегралы с фазой $\mathbf{f}$ по допустимым цепям, сосредоточенным в окрестности критической точки ростка $\mathbf{f}$, т. е. интегралы вида $\int_{[\Gamma]} e^{\tau \mathbf{f}} \omega$, где $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$,

ω — голоморфная дифференциальная n -форма на X (см. п. 11.1).

Для фиксированной амплитуды ω интегрирование выражения $e^{\tau \mathbf{f}} \omega$ по допустимым цепям определяет линейную функцию на допустимых цепях, зависящую от параметра τ . При $\tau \rightarrow +\infty$ такая

линейная функция разлагается в асимптотический ряд (теорема 11.1). Старшая часть этого асимптотического ряда называется старшей частью амплитуды ω . Ниже с помощью старших частей всех амплитуд строится фильтрация на пространстве, сопряженном с $H_n(X, X^-; \mathbb{C})$. Эта фильтрация называется ходжевой. Далее, на том же пространстве с помощью оператора монодромии строится другая фильтрация, называемая весовой.

Т е о р е м а 2. Построенные ниже весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа на пространстве, сопряженном с $H_n(X, X^-; \mathbb{C})$.

Далее будет легко убедиться, что теорема 2 является переформулировкой теоремы 13.3 в силу леммы 11.2.

З а м е ч а н и е. Построенная ниже ходжева фильтрация зависит от параметра τ . Теорема 2 справедлива при любом положительном значении параметра ходжевой фильтрации.

Обозначим через H^* пространство, сопряженное с $H_{n-1}(X, X^-; \mathbb{C})$. В H^* имеются естественные вещественное подпространство $H_{\mathbb{R}}^*$ и целочисленная решетка $H_{\mathbb{Z}}^*$ (например, $H_{\mathbb{Z}}^*$ — это линейные функции, принимающие целые значения на естественном образе в $H_{n-1}(X, X^-; \mathbb{C})$ группы $H_{n-1}(X, X^-; \mathbb{Z})$). Определим ходжеву фильтрацию в H^* .

Пусть ω — голоморфная n -форма на X . Согласно теореме 11.1

$$\int_1 e^{\tau f} \omega \approx \sum_{\alpha} \tau^{\alpha} (\ln \tau)^k B_{\alpha, k}^{\omega} [\quad],$$

где $B_{k, \alpha}^{\omega} \in H^*$. Назовем *весом* формы ω наибольшее число α , для которого отличен от нуля коэффициент $B_{0, \alpha}^{\omega}$ (ср. с определением порядка формы в п. 13.1.В). Вес обозначим через $\beta(\omega)$.

З а м е ч а н и е. Согласно формуле (6) на стр. 222 сумма порядка формы и ее веса равна -1 .

Старшей частью формы ω назовем выражение

$$\tau^{\beta(\omega)} (B_{0, \beta(\omega)}^{\omega} + \dots + (\ln \tau)^{n-1} B_{n-1, \beta(\omega)}^{\omega}).$$

Старшая часть — это зависящий от параметра τ вектор пространства H^* .

Зафиксируем положительное число τ . Определим пространство $F_{\tau}^k \subset H^*$ условием: F_{τ}^k — линейная оболочка старших частей всех форм, вес которых не меньше $k - n$ (в старших частях параметр τ фиксирован). Если старших частей такого веса не существует, то полагаем $F_{\tau}^k = \{0\}$. Фильтрацию $\{F_{\tau}^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, назовем *ходжевой*.

Определим весовую фильтрацию в H^* . Как показано в п. 11.1, $H_n(X, X^-; \mathbb{C}) \cong H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$, где $t \in S^-$. Поэтому $H^* \cong H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$. В $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ весовая фильтрация определена в п. 13.2. В качестве *весовой* фильтрации в H^* возьмем фильтрацию, индуцированную из весовой фильтрации в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$.

14.3. Обзор результатов о смешанной структуре Ходжа.

А. Смешанная структура Ходжа и форма пересечений. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в μ -кратной критической точке. Рассмотрим форму пересечений S в $(n-1)$ -мерных гомологиях $H_{n-1}(X_t, \mathbb{R})$, исчезающих в критической точке. Обозначим через μ_0 размерность ядра формы S . Если n четно, то форма S — кососимметрическая и μ_0 — единственный вещественный инвариант формы S . Если n нечетно, то форма S — симметрическая и вещественным линейным преобразованием форму S можно диагонализировать. Пусть μ_+ и μ_- — числа положительных и отрицательных коэффициентов диагонализации. Числа μ_0, μ_+, μ_- образуют полный набор вещественных инвариантов формы S .

Обозначим через $h_{\lambda}^{k,m}$ числа Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке ростка f .

Теорема 3 (см. [221]).

$$\mu_0 = \sum_{k+m \leq n} h_1^{k,m} - \sum_{k+m \geq n+2} h_1^{k,m}.$$

Если n нечетно, то

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \sum_{\substack{k+m=n+1 \\ m-\text{четно}}} h_1^{k,m} + 2 \sum_{\substack{k+m \geq n+2 \\ m-\text{четно}}} h_1^{k,m} + \sum_{\lambda \neq 1} \sum_{m-\text{четно}} h_{\lambda}^{k,m}, \\ \mu_- &= \sum_{\substack{k+m=n+1 \\ m-\text{нечетно}}} h_1^{k,m} + 2 \sum_{\substack{k+m \geq n+2 \\ m-\text{нечетно}}} h_1^{k,m} + \sum_{\lambda \neq 1} \sum_{m-\text{нечетно}} h_{\lambda}^{k,m}. \end{aligned}$$

Следствие 1. Форма S невырождена тогда и только тогда, когда число 1 не является собственным числом оператора монодромии.

Следствие 2 (см. [221]). Если n четно, то $\mu - \mu_0$ четно. Если $n \equiv 3 \pmod{4}$, то $\mu - \mu_-$ четно. Если $n \equiv 1 \pmod{4}$, то $\mu - \mu_+$ четно.

Если f — росток квазиоднородной функции, то числа Ходжа $h_{\lambda}^{k,m}$ можно выразить в терминах квазиоднородной структуры локальной алгебры критической точки (см. теоремы 13.4, 13.5). Сформулируем теорему 3 в этом случае.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток квазиоднородной функции типа $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и веса 1. Предположим, что 0 — конечнократная критическая точка ростка f . Пусть $\{x^m \mid m \in I\}$ — набор одночленов, проектирующихся в базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Для $m \in I$ положим $l(m) = (m_1 + 1)\alpha_1 + \dots + (m_n + 1)\alpha_n - 1$.

Теорема 4 (см. [219]).

$$\mu_0 = \# \{m \in I \mid l(m) \in \mathbb{Z}\}.$$

Если n нечетно, то

$$\begin{aligned}\mu_+ &= \# \{m \in I \mid l(m) \notin \mathbb{Z}, [l(m)] \text{ нечетно}\}, \\ \mu_- &= \# \{m \in I \mid l(m) \notin \mathbb{Z}, [l(m)] \text{ четно}\}.\end{aligned}$$

Пример 1. $A_\mu: f = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2$, $\alpha = (1/(\mu+1), 1/2, 1/2)$, $I = \{(m_1, 0, 0) \mid m_1 = 0, \dots, \mu-1\}$, $l(m) = (m_1 + 1)/(\mu + 1)$. Для любого $m \in I$ имеем $l(m) \in (0, 1)$. Форма пересечений отрицательно определена.

Пример 2. $f = x_1^{a_1} + \dots + x_n^{a_n}$. Форма пересечений невырождена, если числа $a_1, \dots, a_n$ попарно взаимно просты.

Пусть f — росток квазиоднородной функции. Сформулируем теорему, связывающую в этом случае форму пересечений с операцией умножения в локальной алгебре критической точки ростка.

Пусть X_t — слой расслоения Милнора критической точки ростка f квазиоднородной функции. Рассмотрим гомоморфизм Пуанкаре

$$\pi: H_{n-1}(X_t, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}).$$

Нетрудно убедиться, что образ гомоморфизма совпадает с $\bigoplus_{\lambda \neq 1} H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})_\lambda$, где индекс λ обозначает корневое подпростран-

ство собственного числа λ оператора монодромии. Определим на образе гомоморфизма форму S^* формулой

$$S^*(\cdot, \cdot) = S(\pi^{-1}(\cdot), \pi^{-1}(\cdot)).$$

Для любого $m \in I$ положим $\omega_m = x^m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Согласно теореме 13.6 геометрические сечения форм ω_m , $m \in I$, составляют базис сечений когомологического расслоения Милнора. Если $l(m) \notin \mathbb{Z}$, то значения геометрического сечения формы ω_m принадлежат образу гомоморфизма Пуанкаре. Форму ω_m назовем *примитивной*, если $l(m) \notin \mathbb{Z}$.

Обозначим через J класс гессиана $\det(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$ в локальной алгебре $Q = \mathbb{C}\{x\}/(\partial f / \partial x)$. Линейный функционал $\alpha: Q \rightarrow \mathbb{C}$ назовем *допустимым*, если $\alpha(J) \neq 0$ и α квазиоднороден (т. е. равен нулю на элементах алгебры Q , степень квазиоднородности которых отлична от степени элемента J).

Для $m \in I$ положим $R(m) = l(m)(l(m) - 1) \dots (l(m) - [(n-2)/2])$, если $n \geq 2$, и $R(m) = 1$, если $n = 1$.

Теорема 5 (см. [242]). Значения геометрических сечений двух примитивных форм $\omega_m, \omega_{m'}$ ортогональны относительно формы S^* , если сумма порядков форм (т. е. число $l(m) + l(m')$) не является целым числом или эта сумма меньше $(n-2)$. Существует допустимый линейный функционал α на локальной алгебре Q , обладающий свойством: для любых двух примитивных форм $\omega_m, \omega_{m'}$, сумма порядков которых равна $n-2$,

$$S^*(s[\omega_m], s[\omega_{m'}]) = \text{const} \cdot \alpha(x^m \cdot x^{m'}) t^{n-2} / (R(m) \cdot R(m')),$$

где $\text{const} = 1$, если n нечетно, $\text{const} = l(m) - l(m')$, если n четно; $s[\omega]$ — геометрическое сечение формы ω ; t — координата в базе расслоения Милнора.

Пример. Пусть f, I — из примера 1. Все формы $\omega_m, m \in I$, примитивны. Существует константа $c \neq 0$, обладающая свойством:

$$S^*(s[\omega_m], s[\omega_{m'}]) = ct/(l(m) \cdot l(m'))$$

для любых $m, m' \in I$, для которых $l(m) + l(m') = 1$. На остальных парах форм $\omega_m, \omega_{m'}$ форма S^* равна нулю.

Б. Смешанная структура Ходжа и деформации. Предположим, что критическая точка голоморфной функции при деформации функции распадается на несколько более простых критических точек.

Проблема. Как связаны смешанные структуры Ходжа исходной критической точки и критических точек, полученных при распадении?

Вероятно, имеются формулируемые в терминах смешанных структур Ходжа «законы сохранения» для распадений критических точек. Многочисленные примеры подсказывают следующую гипотезу.

Упорядочим спектр критической точки: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_\mu$.

Гипотеза (В. И. Арнольд [124]). Спектр полунепрерывен в следующем смысле: если критическая точка P примыкает к (более простой) критической точке P' (с $\mu' < \mu$), то $\alpha_k \leq \alpha'_k$.

Замечания. 1. Даже в простых и явно вычислимых случаях, таких как квазиоднородный случай или случай критической точки функции двух переменных с невырожденной главной частью ряда Тейлора, эта гипотеза является нетривиальным арифметическим утверждением о целых точках внутри выпуклых полиэдров.

2. В. В. Горюнов [47] проверил гипотезу для примыканий простых критических точек к простым, для примыканий унимодальных критических точек к унимодальным, для примыканий бимодальных критических точек коранга 2 друг к другу; см. [47] и таблицу спектров на стр. 276.

3. Симметрия спектра относительно точки $n/2 - 1$ доказывает гипотезу для случая, в котором критическая точка P' невырождена.

4. Из симметрии спектра относительно точки $n/2 - 1$ и гипотезы следуют двусторонние неравенства $\alpha_k \leq \alpha'_k \leq \alpha_{k+(\mu-\mu')}$. Например, если от сложной критической точки отщепляется одна морсовская точка ($\mu = \mu' + 1$), то спектр точки P' разделяет спектр точки P .

Отношение между спектрами точек P, P' такое же, как между полуосями эллипсоида в $\mathbb{R}^\mu$ и полуосями его сечения подпространством $\mathbb{R}^{\mu'}$.

5. Гипотеза влечет полунепрерывность размерностей пространств ходжевой фильтрации, а именно, полунепрерывность чисел

$$h^r = \sum_{r \leq k} \sum_m h^{k,m}, \quad h_r = \sum_{r > k} \sum_m h^{k,m}.$$

6. В частности, для критической точки функции двух переменных эти полунепрерывности сводятся к полунепрерывности рода g слоя расслоения Милнора и полунепрерывности «корода» $\mu - g$ (в этом случае слой — риманова поверхность эйлеровой характеристики $1 - \mu$ с $\mu + 1 - 2g$ «дырами»). Полунепрерывность обоих чисел очевидна (полунепрерывность «корода» следует из мономорфности вложения гомотопий, исчезающих в более простой точке, в гомотопии, исчезающие в более сложной критической точке).

7. Сформулированная гипотеза является исправлением и обобщением гипотезы о полунепрерывности показателя осцилляции критической точки вещественной аналитической функции (см. п. 6.6, 9.2, 13.1.Г, 13.3.В, [4, 5, 122]).

Рассмотрим деформацию исходной критической точки P . Предположим, что в процессе деформации критическая точка не распадается, т. е. при каждом значении параметра деформации имеется ровно одна критическая точка кратности μ .

Т е о р е м а 6 (см. [19, 23]). *При таких деформациях спектр постоянен.*

З а м е ч а н и я. 1. Утверждение теоремы является вариантом утверждения гипотезы Арнольда для случая $\mu = \mu'$.

2. В [23] доказано, что подпространства весовой и ходжевой фильтраций голоморфно изменяются при изменении параметра деформации.

3. Из теоремы 6 следует, что наибольший возможный порядок интеграла голоморфной формы по классам ковариантно постоянного семейства гомотопий, исчезающих в критической точке (т. е. первое спектральное число), не изменяется при указанных деформациях. Это означает, что если при некоторой деформации критической точки наибольший возможный порядок изменяется, то при деформации не сохраняется кратностью критической точки (т. е. критическая точка распадается). Из этого рассуждения извлекается формулируемая ниже теорема 7.

Рассмотрим росток голоморфной функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ в критической точке кратности μ и его деформацию $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Стратом $\mu = \text{const}$ деформации называется росток множества $(\Lambda, 0) \subset (\mathbb{C}^k, 0)$, состоящего из всех значений параметров λ , при которых функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет критическую точку кратности μ с нулевым критическим значением.

Т е о р е м а 7 (см. [26]). *Коразмерность страта $\mu = \text{const}$ в базе версальной деформации ростка голоморфной функции в конечно-кратной критической точке не меньше чем число тех спектральных чисел смешанной структуры Ходжа критической точки ростка, которые меньше $\alpha_1 + 1$ (α_1 — первое спектральное число).*

З а м е ч а н и е. В случае критической точки полуквазиоднородной функции коразмерность страта $\mu = \text{const}$ в базе версальной деформации равна числу спектральных чисел, указанных в теореме 7. Оценка сверху следует из [171], оценка снизу дается

теоремой 7, и числа, оценивающие коразмерность сверху и снизу, равны. Более того, в случае критической точки квазиоднородной функции упомянутое перед теоремой 7 рассуждение позволяет явно указать страт $\mu = \text{const}$.

Теорема 8 (см. [26]). Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — квазиоднородный росток типа $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и веса 1. Пусть $\{x^m \mid m \in I\}$ — набор одночленов, проектирующихся в базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Рассмотрим представителя $F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{m \in I} \lambda_m x^m$ версальной деформации ростка f . Тогда страт $\mu = \text{const}$ задается уравнениями $\{\lambda_m = 0 \mid m \in I, (\alpha, m) < 1\}$.

Для однородных ростков теорема 8 доказана в [39].

В самое последнее время достигнут прогресс в доказательстве гипотезы Арнольда.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в изолированной критической точке, $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — его деформация.

О п р е д е л е н и е. Подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется *множеством полунепрерывности* для данной деформации F , если оно обладает свойством: для любого достаточно малого $\lambda \in \mathbb{C}^l$ пусть $x^1, \dots, x^s \in \mathbb{C}^n$ — критические точки функции $F(\cdot, \lambda)$, имеющие единое критическое значение, тогда количество чисел спектра исходной критической точки ростка f , попавших в U , не меньше, чем суммарное количество попавших в U чисел спектров критических точек $x^1, \dots, x^s$.

Г и п о т е з а о полунепрерывности плотности спектра (см. [255]). Для любой деформации всякий интервал $(\alpha, \alpha+1)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, является множеством полунепрерывности.

З а м е ч а н и е. Может быть, в формулировке гипотезы нужно заменить интервал $(\alpha, \alpha+1)$ на полуинтервал $(\alpha, \alpha+1]$.

Ясно, что из этой гипотезы следует гипотеза Арнольда.

У т в е р ж д е н и я о полунепрерывности.

(I) Гипотеза о полунепрерывности плотности спектра справедлива для деформаций ростков функций одной или двух переменных (см. [257, 264]).

(II) Всякий интервал $(\alpha, \alpha+1)$ при $\alpha \in (-2, -1)$ и полуинтервал $(-1, 0]$ являются множествами полунепрерывности для деформаций ростков функций любого числа переменных (см. [257, 264]).

(III) Для любого иррационального $\alpha \in \mathbb{R}$ множество $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha + 2k, \alpha + 2k + 1)$ является множеством полунепрерывности для деформаций ростков функций любого числа переменных (см. [254]).

(IV) Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — квазиоднородный многочлен типа $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ и веса 1, имеющий в начале координат изолированную критическую точку. Назовем его нижней деформацией всякий

многочлен

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_j \varphi_j,$$

где $\{\varphi_j\}$ — одночлены квазиоднородного веса, меньшего 1. Тогда для нижних деформаций многочлена справедлива гипотеза о полунепрерывности плотности спектра (см. [255]).

С л е д с т в и я. 1) Комплексный показатель осцилляции критической точки роста функции одной, двух или трех переменных полунепрерывен сверху при деформациях (см. [256]).

2) Назовем критическую точку роста функции любого числа переменных достаточно вырожденной, если ее комплексный показатель осцилляции принадлежит $(-1, 0]$. Тогда комплексный показатель осцилляции достаточно вырожденной критической точки полунепрерывен сверху при деформациях роста (см. [256]).

Критерий достаточной вырожденности см. в [256] и в п. 13.1.Ж.

Пункт (IV) утверждения дает новые результаты в следующем вопросе. Пусть $Y \subset \mathbb{C}P^n$ — алгебраическая гиперповерхность степени d , имеющая только невырожденные (простые, двойные) особые точки.

Каково максимальное число $N_n(d)$ невырожденных особых точек, которое может иметь гиперповерхность степени d ?

Полный ответ на этот вопрос известен только при $n=1, 2$: при $n=1$ $N_1(d) = [d/2]$, при $n=2$ $N_2(d) = d(d-1)/2$. Первый нетривиальный случай $n=3$.

Оценки сверху. Первым результатом является результат А. Бассе (1906, [250]):

$$N_3(d) \leq (d(d-1)^2 - 5 - \sqrt{d(d-1)(3d-14) + 25})/2,$$

с асимптотикой оценивающего числа, равной $d^3/2$ при $d \rightarrow \infty$. В дальнейшем (см. [251—253, 258]) оценка улучшалась и обобщалась на случай $n > 3$, однако во всех этих работах оценивающее число имело асимптотику $d^n/2$ при $d \rightarrow \infty$. Оценку с новой асимптотикой дает пункт (IV) предыдущего утверждения.

Назовем числом Арнольда $A_n(d)$ число целых точек $(k_1, \dots, k_n)$ строго внутри куба $(0, d)^n$, для которых $(n-2)d^n/2 + 1 < \sum k_i \leq nd/2$. Например, при $n=3$ $A_3(d) = 23d^3/48 +$ (члены меньшей степени по d).

Утверждение об оценке сверху (см. [255]). Пусть $Y \subset \mathbb{C}P^n$ — алгебраическая гиперповерхность степени d , имеющая только изолированные особые точки. Тогда число ее невырожденных особых точек не больше числа $A_n(d)$. Если $n=3$, то число всех особых точек не больше $A_3(d)$.

Для фиксированного n число $A_n(d)$ имеет вид $a_n d^n +$ (члены меньшей степени по d). Нетрудно показать, что $a_n \sim \sqrt{6/\pi n}$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценки снизу. С. В. Чмутов предложил метод, который дает, по-видимому, наилучшую оценку снизу числа $N_n(d)$ при

больших d . Чмутов в качестве гиперповерхности с большим числом особых точек предложил рассматривать гиперповерхность с аффинным уравнением $\sum_{j=1}^n T_d(x_j) = 0$, если n четно, и $\sum_{j=1}^n T_d(x_j) = 1$, если n нечетно, где T_d — многочлен Чебышева степени d , имеющий два критических значения ± 1 . Число $C_n(d)$ особых точек гиперповерхности Чмутова имеет вид $c_n d^n +$ (члены меньшей степени по d). Например, $c_3 = 3/8$. При $n \rightarrow \infty$ $c_n \sim \sqrt{2/(\pi n)}$.

В. Вещественные особенности. Обсудим приложения смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях к оценкам вещественных характеристик вещественных функций. Такие приложения связаны с исследованиями в алгебраической геометрии топологии вещественных алгебраических многообразий.

Рассмотрим неособую вещественную алгебраическую кривую степени m , лежащую на вещественной проективной плоскости. Компоненты связности кривой (одномерные многообразия, диффеоморфные окружности) называются *овалами*. Вопрос о взаимном расположении овалов вещественной алгебраической кривой — один из классических вопросов геометрии (см. 16-ю проблему Гильберта).

Плоские кривые второй степени были изучены еще в Древней Греции, кривые третьей и четвертой степеней — Декартом и Ньютоном. Изучение топологии кривых более высокой степени оказалось значительно более трудной задачей: топология неособых кривых 6-й степени была полностью исследована лишь к 1969 г., а все возможные расположения овалов кривой 8-й степени не известны и сегодня (см. [9, 49, 35]).

Наряду с описаниями расположений овалов кривых малых степеней известны общие утверждения о том, в каких диапазонах могут изменяться различные числовые характеристики алгебраических кривых данной степени (см. [9]). Утверждением такого рода является формулируемое ниже неравенство И. Г. Петровского. Мы обсудим его обобщения.

Каждый овал кривой четной степени делит проективную плоскость на две части, одна из которых диффеоморфна кругу и называется *внутренностью* овала, другая диффеоморфна листу Мёбиуса. Овал называется *положительным* (или *четным*), если он лежит внутри четного числа других, и *отрицательным* (или *нечетным*), если он лежит внутри нечетного числа овалов. Обозначения: p — число положительных, k — число отрицательных овалов.

В 1938 г. И. Г. Петровский доказал [196] для кривых четной степени $d=2l$ неравенство

$$|2(p-k)-1| \leq 3l^2 - 3l + 1;$$

там же приведено обобщение этого неравенства для кривых нечетной степени. В 1949 г. И. Г. Петровский и О. А. Олейник доказали [83] аналогичные неравенства для гладких вещественных алгебраических гиперповерхностей в пространстве любого числа измерений.

А именно, рассмотрим вещественную неособую проективную гиперповерхность $A \subset \mathbb{R}P^{n-1}$ степени d , заданную однородным многочленом f от n переменных. Если d четно, обозначим через B_+ и B_- части $\mathbb{R}P^{n-1}$, заданные условиями $f \geq 0$, $f \leq 0$, соответственно.

Числом Петровского назовем число целых точек, строго внутри куба $(0, d)^n$ лежащих в проходящей через центр куба гиперплоскости, перпендикулярной главной диагонали куба. Обозначение:

$$\Pi_n(d) = \{ \# k = (k_1, \dots, k_n) \mid 0 < k_s < d, \sum k_s = dn/2 \}.$$

Неравенства Петровского—Олейник состоят в следующем:

$$\begin{aligned} |\chi(A) - 1| &\leq \Pi_n(d), \text{ если } n \text{ четно;} \\ |\chi(B_+) - \chi(B_-)| &\leq \Pi_n(d), \text{ если } n \text{ нечетно, а } d \text{ четно,} \end{aligned}$$

где χ —эйлерова характеристика. В частности, первое неравенство при $n=4$ оценивает эйлерову характеристику алгебраических поверхностей в трехмерном вещественном проективном пространстве, второе неравенство при $n=3$ совпадает с неравенством Петровского.

В. И. Арнольдом предложена следующая единая форма неравенств Петровского—Олейник.

Теорема 8 (см. [7]). Число, стоящее в левой части неравенства Петровского—Олейник, как и в случае четного, так и в случае нечетного числа переменных n , равно $|\text{ind}|$, где ind —индекс особой точки $0 \in \mathbb{R}^n$ градиента в $\mathbb{R}^n$ многочлена f , задающего рассматриваемую гиперповерхность.

Теорема 9 (см. [7]). Число, стоящее в правой части неравенства Петровского—Олейник, для гиперповерхности, заданной однородным многочленом f , равно числу Ходжа $h_{\lambda=1}^{n/2, n/2}$ смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке $0 \in \mathbb{C}^n$ многочлена f (рассматриваемого как функция на $\mathbb{C}^n$), если число переменных n четно, и равно числу Ходжа $h_{\lambda=1}^{(n+1)/2, (n+1)/2}$ смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ многочлена $f(x) + y^2$, если число переменных n нечетно, а степень d многочлена f четна.

Таким образом, неравенства Петровского—Олейник приобретают единый вид: модуль индекса особой точки в $\mathbb{R}^n$ градиента многочлена с вещественными коэффициентами оценивается сверху через соответствующее число Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке многочлена, рассматриваемого как функция на комплексном пространстве.

В этой форме неравенства Петровского—Олейник обобщены на случай конечнократной критической точки гладкой функции.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ —росток голоморфной функции в конечнократной критической точке. Предположим, что росток f , ограниченный на вещественное подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, принимает только вещественные значения. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ в окрестности начала координат векторное поле $\text{grad } f|_{\mathbb{R}^n}$. Обозначим через ind индекс его особой точки 0.

Теорема 10 (см. [7]). *Если $n = 2k$ четно, то*

$$|\text{ind}| < h_{\lambda=1}^{k,k},$$

где $h_{\lambda=1}^{k,k}$ —число Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке роста f . Если $n = 2k - 1$ нечетно, то

$$|\text{ind}| < h_{\lambda=1}^{k,k},$$

где $h_{\lambda=1}^{k,k}$ —число Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ростка $f(x) + z^2$ функции $(n+1)$ -й переменной.

З а м е ч а н и я. 1. При $n=2$ из теоремы следует, что модуль индекса конечнократной особой точки 0 градиента вещественной функции двух переменных с фиксированным многоугольником Ньютона не превосходит числа внутренних целых точек на диаграмме Ньютона (см. [7], а также п. 13.3.Г).

2. Как и в случае неравенств Петровского—Олейник, индекс может быть выражен через эйлеровы характеристики локальных многообразий уровня ростка $f|_{\mathbb{R}^n}$. А именно, пусть X_t —слой расслоения Милнора критической точки ростка f . Обозначим его вещественную часть $X_t \cap \mathbb{R}^n$ через $\mathbb{R}X_t$. Обозначим через $\tilde{\chi}_+$ (соответственно $\tilde{\chi}_-$) приведенную (уменьшенную на 1) эйлерову характеристику многообразия $\mathbb{R}X_t$ при положительных t (соответственно при отрицательных t). Легко доказывается (см., например, [7]).

Лемма 1. *Индекс особой точки 0 векторного поля $\text{grad } f|_{\mathbb{R}^n}$ связан с приведенными эйлеровыми характеристиками вещественных локальных многообразий уровня ростка $f|_{\mathbb{R}^n}$ соотношениями*

$$\text{ind} = -\tilde{\chi}_- = \begin{cases} -\tilde{\chi}_+, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \tilde{\chi}_+, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

3. Для числа $h_{\lambda=1}^{k,k}$, участвующего в теореме, вне зависимости от четности числа n есть единое выражение через спектр критической точки ростка f : это число равно количеству спектральных пар равных $(n/2 - 1, n - 1)$. При $n = 2k$ это утверждение очевидно, при $n = 2k - 1$ нужно воспользоваться следствием теоремы 13.7. Отметим, что $(n/2 - 1, n - 1)$ —центр симметрии набора спектральных пар.

4. Прототипом неравенств теоремы является наряду с неравенствами Петровского — Олейник следующее неравенство В. М. Харламова [101]:

$$|\chi(A) - 1| \leq h^{k, k} - 1,$$

где A — произвольное неособое вещественное проективное многообразие размерности $2k$, $h^{k, k}$ — число Ходжа чистой структуры Ходжа в когомологиях комплексификации многообразия A .

Другие ограничения на расположение вещественного алгебраического многообразия см. в работах В. И. Арнольда, О. Я. Виро, Д. А. Гудкова, В. И. Звонилова, В. В. Никулина, О. А. Олейник, И. Г. Петровского, Г. М. Полотовского, В. А. Рохлина, Р. Тома, В. М. Харламова, цитированных в конце книги.

5. Оценка, указанная в теореме, служит примером следующей общей схемы рассуждений в вещественной геометрии (см. В. И. Арнольд [7]). Для оценки какого-либо инварианта вещественного топологического типа подыскивается подходящий инвариант комплексного объекта, мажорирующий первый. Инварианты комплексных объектов постоянны для почти всех членов комплексного неприводимого семейства (так как невырожденные случаи соответствуют комплексной гиперповерхности в пространстве параметров семейства, а дополнение к такой гиперповерхности связно). Поэтому инварианты комплексного объекта вычисляются в терминах дискретных данных задачи (степень, многогранник Ньютона и т. п.). Таким образом, оценка инвариантов вещественного топологического типа разбивается на две задачи: отыскание мажорирующего инварианта комплексного объекта и его вычисление через дискретные данные.

6. Сформулируем нерешенную задачу [7]: дать неулучшаемые оценки (через числа Ходжа (?)) для индивидуальных чисел Бетти локального многообразия уровня вещественной гладкой функции в окрестности вырожденной критической точки, в частности, для числа b_0 . Быть может, легче оцениваются числа b_0 , $b_0 - b_1$, $b_0 - b_1 + b_2, \dots$, а также комбинации локальных типовых чисел Морса M_0 , $M_0 - M_1$, $M_0 - M_1 + M_2, \dots$, где M_i — число сливающихся в исходной критической точке невырожденных критических точек индекса i для какой-либо морсовизации исходной критической точки.

В заключение пункта укажем перестройки поверхностей уровня функции трех переменных в окрестности простой или унимодальной критической точки.

Хорошо известно, что в окрестности невырожденной критической точки функция в подходящих переменных — квадратичная форма. Поэтому, в зависимости от сигнатуры квадратичной формы, имеются две возможности. В первом случае поверхности уровня — сферы и пустые множества (в зависимости от значения уровня), а во втором случае — однополостные и двуполостные гиперболоиды. Оказывается, что в окрестности простой или унимодальной критической

точки функции трех переменных поверхности уровня перестраиваются десятью указанными ниже способами.

Перестройка поверхностей уровня в окрестности критической точки с нулевым критическим значением — это пара поверхностей малого положительного и малого отрицательного уровня, лежащих в шаре малого радиуса с центром в критической точке. Такая пара задается разбиением сферы малого радиуса с центром в критической точке нулевой поверхностью уровня на две части: множество, на котором принимаются положительные значения, — диффеоморфно поверхности малого положительного уровня, множество, на котором принимаются отрицательные значения, — диффеоморфно поверхности малого отрицательного уровня, множество нулевых значений — гладкое одномерное многообразие (объединение «овалов»); см. [79].

Такое разбиение сферы удобно описывать графом, вершинам которого приписаны знаки $+$ или $-$. Если задано разбиение, то его связные области — это вершины графа (взятые со знаком функции в этой области), вершины соединены ребром, если области соседние. Из односвязности сферы следует, что этот граф — дерево. Например, для функции $x^2 + y^2 - z^2$ этот граф — три вершины, связанные двумя отрезками, крайние из которых имеют знак $-$.

Если функция зависит от двух переменных (от одной переменной), то ее перестройка в окрестности критической точки задается разбиением окружности (пары точек) малого радиуса на две области — положительных и отрицательных значений функции. Такое разбиение определяется количествами связных компонент этих областей — парой чисел (b_0^+, b_0^-) называемой далее *типом перестройки*.

В формулируемой ниже теореме используются буквенные обозначения критических точек функций, приведенные в § 17 ОДО-1. Буквы имеют индексы $+$, $-$, $\pm$. Их столько, сколько знаков $\pm$ в соответствующей формуле в § 17 ОДО-1, или на 1 больше. В этом случае лишний знак — это знак параметра a в соответствующей формуле. При этом порядок индексов в обозначении совпадает с порядком знаков в формуле. Предполагаются выполненными ограничения, указанные в § 17, кроме того, в $T_{p,q,r}$ $p, q, r > 2$.

Т е о р е м а (С. Ю. Оревков). 1. *Критические точки функций одной переменной имеют перестройки трех типов: тип $(2,0)$ — минимум — имеют A_{2k+1}^+ , тип $(0,2)$ — максимум — имеют A_{2k+1}^- , тип $(1,1)$ имеют A_{2k} .*

2. *Простые и унимодальные критические точки с нулевой 2-струей функций двух переменных имеют перестройки линий уровня следующих типов. Тип $(1,0)$ имеют критические точки: X_9^{++} при $a > -2$, X_{9+2k}^{+++} , $Y_{2r, 2s}^{+++}$, $\tilde{Y}_r^+$; тип $(0,1)$ имеют X_9^{--} при $a < 2$, X_{9+2k}^{---} , $Y_{2r, 2s}^{---}$, $\tilde{Y}_r^-$; тип $(1,1)$ имеют D_{2k}^+ , E_6 , E_8 , J_{10}^+ при $a^2 < 4$, J_{10+2k}^{++} , J_{10+2k}^{--} , $X_{9+2k+1}^{++\pm}$, $X_{9+2k+1}^{--\pm}$, $Y_{2r, 2s+1}^{++\pm}$, $Y_{2r, 2s+1}^{--\pm}$; тип $(2,2)$ имеют $D_{2k+1}^{\pm}$, E_7 , X_9^{+-} , X_9^{-+} , $J_{10+2k+1}^{\pm}$, $X_{9+2k}^{+\pm}$, $X_{9+2k}^{-\pm}$, $Y_{2r, 2s}^{\pm+}$, $Y_{2r, 2s}^{\pm-}$.*

$Y_{2r, 2s}^{\pm - +}$, $Y_{2r+1, 2s+1}^{\pm \pm \pm}$; тип (3,3) имеют D_{2k}^- , J_{10}^- , J_{10}^+ при $a^2 > 4$, J_{10+2k}^{+-} , J_{10+2k}^{-+} , $X_{9+2k+1}^{+-\pm}$, $X_{9+2k+1}^{-+\pm}$, $Y_{2r, 2s+1}^{+-\pm}$, $Y_{2r, 2s+1}^{-+\pm}$; тип (4,4) имеют X_9^{++} при $a < -2$, X_9^{--} при $a > 2$, X_{9+2k}^{+-} , X_{9+2k}^{-+} , $Y_{2r, 2s}^{+-}$, $Y_{2r, 2s}^{-+}$.

3. Унимодальные критические точки функций трех переменных имеют перестройки поверхностей уровня, типы и

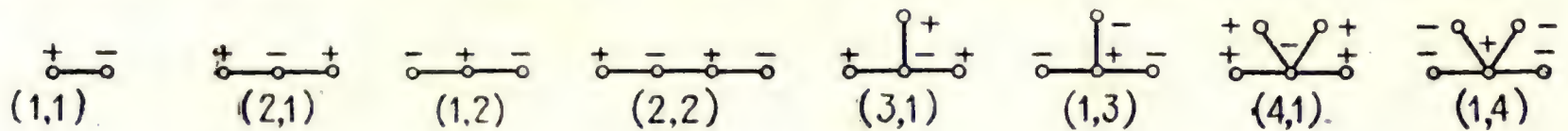


Рис. 84.

графы которых указаны на рис. 84. Тип (1,1) имеют P_8^+ при $a^2 < 4$, P_{8+2k}^{++} , P_{8+2k}^{--} , $R_{2l, 2m}^{+-}$, $R_{2l, 2m}^{-+}$, $R_{2l+1, 2m+1}^{++}$, $R_{2l+1, 2m+1}^{--}$, $\tilde{R}_m^{++}$, $\tilde{R}_{2m+1}^{+-}$, $T_{2p, 2q, 2r+1}^{+-\pm}$, $T_{2p+1, 2q+1, 2r+1}^{\pm \pm \pm \pm}$ (четное число плюсов), $\tilde{T}_{2p+1, m}^+$, E_{12} , E_{14} , W_{12} , Q_{10} , Q_{12} , S_{12} , $U_{12}^{+\pm}$. Тип (2,1) имеют P_{8+2k+1}^{++} , P_{8+2k+1}^{--} , $R_{2l, 2m+1}^{+-}$, $T_{2p, 2q, 2r}^{+-}$, $T_{2p, 2q+1, 2r+1}^{+-\pm}$, $\tilde{T}_{2p, m}^+$, E_{13} , Z_{13}^{+-} , W_{13}^{+-} , Q_{11} , S_{11} , Z_{11}^+ . Тип (1,2) имеют P_{8+2k+1}^{+-} , P_{8+2k+1}^{-+} , $R_{2l, 2m+1}^{+-}$, $T_{2p, 2q, 2r}^{+-}$, $T_{2p, 2q+1, 2r+1}^{+-\pm}$, $\tilde{T}_{2p, m}^-$, E_{13}^+ , Z_{13}^{+-} , W_{13}^{+-} , Q_{11}^- , S_{11}^+ , Z_{11}^+ . Тип (2,2) имеют P_8^+ при $a^2 > 4$, P_{8+2k}^{+-} , P_{8+2k}^{-+} , $R_{2l+1, 2m+1}^{+-}$, $R_{2l+1, 2m+1}^{-+}$, $\tilde{R}_{2m+1}^{+-}$, $\tilde{R}_m^{--}$, $T_{2p+1, 2q+1, 2r+1}^{\pm \pm \pm \pm}$ (нечетное число плюсов), $\tilde{T}_{2p+1, m}^-$. Тип (3,1) имеют $R_{2l, 2m}^{--}$, $\tilde{R}_{2m}^{+-}$, $\tilde{R}_{2m}^{-+}$, $T_{2p, 2q, 2r+1}^{--\pm}$, Z_{12}^- , U_{12}^- . Тип (1,3) имеют $R_{2l, 2m}^{++}$, $\tilde{R}_{2m}^{+-}$, $\tilde{R}_{2m}^{++}$, $T_{2p, 2q, 2r+1}^{++\pm}$, Z_{12}^- , U_{12}^+ . Тип (4,1) имеют $T_{2p, 2q, 2r}^{--}$. Тип (1,4) имеют $T_{2p, 2q, 2r}^{++}$.

Следствие. Для критических точек пункта 3 теоремы граф перестройки определяется типом перестройки.

Замечания. 1 (С. Ю. Оревков). Теорема позволяет описать перестройки гиперповерхностей уровня в окрестностях критических точек, являющихся прямыми суммами критических точек, перечисленных в теореме. Действительно, если прямые слагаемые зависели одно от m , а другое от k переменных, то область положительных (отрицательных) значений суммы на сфере S^{m+k-1} будет соответствовать множеству $(M_{\pm}^{m-1} \times D^k) \cup (D^m \times M_{\pm}^{k-1})$ при гомеоморфизме $(S^{m-1} \times D^k) \cup (D^m \times S^{k-1}) \rightarrow S^{m+k-1}$, где $M_{\pm}$ — область положительных (отрицательных) значений прямого слагаемого на соответствующей сфере. В частности, при добавлении квадрата новой переменной (т. е. при переходе к стабильно эквивалентной критической точке) новая область отрицательных значений на сфере получается из старой умножением на интервал, а новая область положительных значений на сфере получается склеиванием двух экземпляров шара по старой области положительных значений на сфере, являющейся границей этого шара.

2. Имеется десять возможных перестроек поверхностей уровня функции трех переменных в окрестности простой или унимодальной

критической точки: восемь из них указаны на рис. 84, оставшиеся две — это $(1,0)$ — минимум, $(0,1)$ — максимум. Это утверждение легко следует из теоремы и предыдущего замечания.

Г. Многочлен Бернштейна. Пусть $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ — квадратичная форма. Имеет место тождество

$$\left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\partial/\partial x_i)^2 \right) Q(x)^\lambda = \lambda \left(\lambda + \frac{n}{2} - 1 \right) Q(x)^{\lambda-1}.$$

Это тождество использовалось И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в [41] для определения комплексной степени квадратичной формы как обобщенной функции. Это тождество послужило мотивировкой формулируемой ниже теоремы И. Н. Бернштейна.

Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции. Пусть λ — независимая переменная. Рассмотрим множество конечных сумм вида $\sum_{k, l \geq 0} a_{k, l}(x) \lambda^l f(x)^{\lambda-k}$, где $a_{k, l}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ — ростки

голоморфных функций, $f^{\lambda-k}$ — формальные символы. Снабдим это множество очевидным соотношением $f(x) \cdot f(x)^{\lambda-k-1} = f(x)^{\lambda-k}$. Рассмотрим дифференциальные операторы $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$ с коэффициентами, голоморфными по x и полиномиальными по λ :

$$P(x, \lambda, \partial/\partial x) = \sum_{k, \alpha \geq 0} b_{k, \alpha}(x) \lambda^k (\partial/\partial x)^\alpha.$$

Эти операторы будут действовать на предыдущем множестве, если положить $\partial/\partial x_i f^{\lambda-k} = (\lambda - k) \partial f / \partial x_i f^{\lambda-k-1}$.

Теорема 11. *Существуют многочлен $B(\lambda)$ и дифференциальный оператор $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$, для которых*

$$P(x, \lambda, \partial/\partial x) f^\lambda = B(\lambda) f^{\lambda-1}. \quad (7)$$

Эта теорема была доказана И. Н. Бернштейном [12] для случая, в котором f — многочлен, и распространена Бьерком [130] на общий случай.

Легко видеть, что множество многочленов $B(\lambda)$ для которых существует тождество (7), образует идеал в $\mathbb{C}[\lambda]$. Унитарная образующая b этого идеала называется *многочленом Бернштейна* ростка f . Очевидно, что $b(0) = 0$ (для этого достаточно положить $\lambda = 0$ в тождестве (7)). Запишем $b(\lambda) = \lambda \tilde{b}(\lambda)$. Многочлен $\tilde{b}(\lambda)$ называется *приведенным многочленом Бернштейна*.

Одним из мотивов доказательства теоремы 11 послужило следующее ее приложение.

Предположим, что росток f на вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ принимает только вещественные значения. Зафиксируем представителя f ростка и определим две функции $f_\pm$ на окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{при } f(x) < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция с носителем, сосредоточенным в достаточно малой окрестности начала координат. Положим

$$I_{\pm}(\lambda, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f_{\pm}(x))^{\lambda} \varphi(x) dx,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный параметр, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Интегралы $I_{\pm}$ можно рассматривать как обобщенные функции, зависящие от параметра λ , на пространстве основных функций $\{\varphi\}$. Интегралы $I_{\pm}$ корректно определены при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и голоморфно зависят от λ .

Теорема 12. *Интегралы $I_{\pm}$ аналитически продолжаются на $\mathbb{C}$ как мероморфные функции параметра λ , их полюса лежат на арифметических прогрессиях*

$$\lambda_i, \lambda_i - 1, \lambda_i - 2, \dots,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — корни многочлена Бернштейна ростка $\mathbf{f}$.

Доказательство.

$$b(\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} f_{\pm}^{\lambda-1} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} [Pf_{\pm}^{\lambda}] \cdot \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\pm}^{\lambda} [P^* \varphi] x;$$

здесь b — многочлен Бернштейна, P — дифференциальный оператор, удовлетворяющий вместе с b тождеству (7), $P^* = \sum (-1)^{|\alpha|} \times \times \lambda^k (\partial/\partial x)^{\alpha} b_{k,\alpha}(x)$ — сопряженный оператор. Эти равенства позволяют аналитически продолжить интегралы $I_{\pm}$ с полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > -1$ и т. д.

В [72, 184] Б. Мальгранж связал корни многочлена Бернштейна с собственными числами оператора монодромии в когомологиях, исчезающих в критической точке ростка $\mathbf{f}$.

Предположим, что росток $\mathbf{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ имеет критическую точку конечной кратности μ . Каждому собственному числу λ оператора монодромии поставим в соответствие арифметическую прогрессию $L(\lambda)$ всех чисел α , для которых $\exp(2\pi i \alpha) = \lambda$.

Теорема 13 (см. [184]). *Корни многочлена Бернштейна ростка $\mathbf{f}$ принадлежат объединению всех построенных арифметических прогрессий. Каждый из корней меньше чем 1.*

С л е д с т в и е. *Корни — рациональные числа.*

Рациональность корней многочлена Бернштейна ростка с не обязательно конечнократной критической точкой доказана Каши-вара в [165].

В [230] в слоях когомологического расслоения Милнора конечнократной критической точки определена фильтрация, и в терминах действия оператора монодромии на пространствах этой фильтрации выражены корни многочлена Бернштейна. Очевидные взаимоотношения этой фильтрации и ходжевой фильтрации указывают новые неравенства, связывающие корни многочлена Бернштейна.

Определим упомянутую фильтрацию, которую будем называть *третьей* (после весовой и ходжевой фильтраций). Третью филь-

рацию в когомологиях $H^{n-1}(X(t))$ слоя расслоения Милнора обозначим через $\{G_t^k\}$.

Для произвольной голоморфной дифференциальной n -формы ω на X разложим в ряд по ковариантно постоянным сечениям ее геометрическое сечение:

$$s[\omega] = \sum_{p, \alpha} t^\alpha (\ln t)^p A_{p, \alpha}^\omega / p!;$$

см. п. 13.1. Подпространство G_t^k положим равным линейной оболочке всех значений в точке t сечений $A_{p, \alpha}^\omega$ с $\alpha \leq n-1-k$, $p=0, 1, \dots, n-1$, всех форм ω .

Из определения легко следует, что третья фильтрация убывающая: $\dots \subset G_t^{k+1} \subset G_t^k \subset \dots$, члены третьей фильтрации инварианты относительно оператора монодромии, для любого k подпространство G_t^k содержит подпространство F_t^k ходжевой фильтрации.

Теорема 14 (см. [230]). Для любого k обозначим через Q_k — минимальный многочлен действия оператора монодромии на G_t^k/G_t^{k+1} . Каждому корню λ многочлена Q_k поставим в соответствие число $l_k(\lambda) + 1 - n$, где $l_k(\lambda)$ определяется условиями $\exp(2\pi i l_k(\lambda)) = \lambda$, $k \leq l_k(\lambda) < k+1$. Рассмотрим объединение всех построенных чисел для всех k — обозначим их через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Тогда $[(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots] \in \mathbb{C}[s]$ — приведенный многочлен Бернштейна.

Следствие. Если f — росток квазиоднородного многочлена, то корни приведенного многочлена Бернштейна ростка получаются из спектра критической точки роста умножением на -1 . (Доказательство: в этом случае третья фильтрация совпадает с ходжевой.)

Из включений членов ходжевой фильтрации в члены третьей фильтрации вытекает следующая теорема.

Теорема 15 (см. [19, 22]). 1. Всякий k -кратный корень приведенного многочлена Бернштейна больше $k-n$.

2. Если $\alpha \in [p, p+1)$ (где p — целое число) — k -кратный корень приведенного многочлена Бернштейна, то на интервале $(-n+k-p, 1)$ среди членов арифметической прогрессии $L(\exp(-2\pi i \alpha))$ имеется не менее k корней (подсчитанных с кратностями) приведенного многочлена Бернштейна.

3. Приведенный многочлен Бернштейна $\tilde{b}(s)$ делится на $(s - \alpha)^n$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$ и оператор монодромии имеет жорданову клетку размера n с собственным числом $\exp(2\pi i \alpha)$. $\tilde{b}(s)$ делится на $(s - \alpha)^{n-1}$ при целом α тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и оператор монодромии имеет жорданову клетку размера $n-1$ с собственным числом 1.

Теорема утверждает, что большая часть корней приведенного многочлена Бернштейна расположена справа от точки $s = 1 - n/2$ (ср. с симметриями спектра в п. 13.3).

Корни многочлена Бернштейна могут изменяться при деформации критической точки ростка в страте $\mu = \text{const}$.

Пример (см. [210]). Пусть $f(x, y) = ax^5 + y^6 + x^4y$, $a \in \mathbb{C}$ — параметр. При $a = 0$ корни приведенного многочлена Бернштейна равны $\{l/24\}$, где $l = -15, -11, -10, -7, -6, -5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15$. При $a \neq 0$ корни приведенного многочлена Бернштейна равны $\{l/24\}$, где $l = -7, -6, -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15$.

В примере корни перескакивают вниз при $a \rightarrow 0$. В [230] доказана теорема, утверждающая, что это явление типично, и в терминах третьей фильтрации объясняющая, как могут изменяться корни многочлена Бернштейна при деформациях критической точки вдоль страта $\mu = \text{const}$.

Укажем работы, имеющие отношение к многочлену Бернштейна: [198, 199, 236—238].

Д. Смешанная структура Ходжа и локальная алгебра критической точки. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в μ -кратной критической точке, $f: X \rightarrow S$ — специализация ростка. В этом пункте рассматриваются голоморфные дифференциальные n -формы на X с точностью до форм, делящихся на df , т. е. классы эквивалентности $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, где $\Omega^p(X)$ — пространство голоморфных дифференциальных p -форм на X . Каждому классу эквивалентности ставится в соответствие сечение подходящего расслоения, построенного из весовой и ходжевой фильтраций когомологического расслоения Милнора критической точки ростка. Это сечение называется *оригинальным коэффициентом класса эквивалентности*. Соответствие, относящее классу эквивалентности оригинальный коэффициент, устанавливает связь пространства $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ с когомологиями, исчезающими в критической точке ростка. Приводится пример использования этой связи.

Замечание. Формы из $\Omega^n(X)$ имеют вид $h dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, формы из $df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ имеют вид $\sum (-1)^k h_k \partial f / \partial x_k \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Поэтому, если X достаточно мало (а это всегда предполагается), то $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ — μ -мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ (как и локальная алгебра $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f / \partial x)$).

Укажем конструкцию оригинального коэффициента. Зафиксируем класс эквивалентности и рассмотрим верхнюю грань порядков форм, принадлежащих классу. Верхнюю грань назовем *ходжевым числом* класса эквивалентности.

Теорема 16 (см. [22, § 9]). *Ходжево число класса равно $+\infty$ тогда и только тогда, когда этот класс есть класс нулевой формы (т. е. совпадает с $df \wedge \Omega^{n-1}(X)$).*

Предположим, что выделенный класс не содержит нулевую форму. Среди форм класса, имеющих наибольший порядок, рассмотрим только те формы, у которых главная часть является сече-

нием подрасслоения весовой фильтрации с наименьшим номером. Этот наименьший номер назовем *весовым числом* класса.

Пусть α , l — ходжево и весовое числа класса соответственно. Главная часть каждой дифференциальной формы класса, удовлетворяющей двум предъявленным выше условиям, проектируется в сечение расслоения $\text{gr}^k F \text{gr}_l W(f^*)$, где $k = n - 1 + [-\alpha]$ (определение $\text{gr}^k F \text{gr}_l W(f^*)$ см. на стр. 271).

Теорема 17 (см. [22, § 9]). *Это сечение не зависит от формы класса, удовлетворяющей двум предъявленным выше условиям, и является ненулевым сечением.*

Указанное сечение расслоения $\text{gr}^k F \text{gr}_l W(f^*)$ называется *оригинальным коэффициентом* класса эквивалентности. Формы класса, имеющие порядок, равный ходжеву числу класса, и у которых главная часть является сечением подрасслоения весовой фильтрации с номером, равным весовому числу класса, называются *оригинальными формами* (ср. с [21, 22]).

Пусть $\omega \in \Omega^n(X)$ — форма порядка α . Предположим, что главная часть формы является сечением весового подрасслоения с номером l и не является сечением весового подрасслоения с номером $l-1$. Тогда главная часть формы ω проектируется в сечение расслоения $\text{gr}^k F \text{gr}_l W(f^*)$, где $k = n - 1 + [-\alpha]$.

Теорема 18 (см. [22, § 9]). *Если сечение подрасслоения $\text{gr}^k F \text{gr}_l W(f^*)$, индуцированное главной частью формы ω , не является нулевым сечением, то форма ω является оригинальной формой в своем классе эквивалентности.*

Ходжевы и весовые числа классов эквивалентности определяют на $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ дополнительные структуры.

Определение. *Спектральным вектором* класса $[\omega] \in \Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ назовем упорядоченную пару $V[\omega] = (\alpha[\omega], l[\omega])$, где $\alpha[\omega]$, $l[\omega]$ — ходжево и весовое числа класса $[\omega]$. Если $[\omega]$ — класс нулевой формы, полагаем $V[\omega] = (+\infty, -\infty)$.

Лексикографически упорядочим спектральные векторы. А именно, положим $V > V'$, если $\alpha > \alpha'$ или если $\alpha = \alpha'$ и $l < l'$. Например, $(1/3, 0) < (1/2, 1) < (1/2, 0)$.

Очевидно, что умножение класса эквивалентности на не равное нулю число не изменяет спектрального вектора; спектральный вектор суммы классов не меньше, чем минимум спектральных векторов слагаемых.

Для любого вектора $V \in \mathbb{R}^2$ обозначим через FW_V (соответственно через $FW_{>V}$) множество всех классов из $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, спектральный вектор которых не меньше V (соответственно, больше V). Очевидно, что $FW_V \supset FW_{>V}$, и каждое из этих подмножеств является комплексным векторным пространством.

Фильтрацию $\{FW_V\}_{V \in \mathbb{R}^2}$ назовем *ходжево-весовой фильтрацией* пространства $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$. Положим

$$\text{gr}_V FW = FW_V / FW_{>V}.$$

Градуированным пространством ходжево-весовой фильтрации назовем μ -мерное комплексное пространство

$$\operatorname{gr} FW = \bigoplus_{V \in \mathbb{R}^2} \operatorname{gr}_V FW.$$

Теоремы 16—18 устанавливают изоморфизм пространства $\operatorname{gr} FW$ и выделенного μ -мерного пространства сечений (пространства оригинальных коэффициентов) μ -мерного расслоения

$$\operatorname{gr} F \operatorname{gr} W (f^*) = \bigoplus_{k, l} \operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W (f^*).$$

Этот изоморфизм относит элементу из $\operatorname{gr}_V FW$ его оригинальный коэффициент.

Неформальный итог указанных выше построений: после факторизаций по ходжевой и весовой фильтрациям пространства когомологий, исчезающих в критической точке роста $\mathbf{f}$, и $\Omega^n(X)/df \wedge \wedge \Omega^{n-1}(X)$ канонически изоморфны. Изоморфизм устанавливается переходом от класса эквивалентности форм к оригинальному коэффициенту класса.

З а м е ч а н и я. 1. Используя указанный изоморфизм, можно определить спектральные пары смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях в терминах ходжево-весовой фильтрации на $\Omega^n(X)/df \wedge \wedge \Omega^{n-1}(X)$. А именно, выделим пару $(\alpha, l) \in \mathbb{R}^2$ ровно столько раз, какова размерность пространства $\operatorname{gr}_{(\alpha, l)} FW$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, и пространства $\operatorname{gr}_{(\alpha, l+1)} FW$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$. Объединение всех выделенных пар совпадает с набором всех спектральных пар.

2. В каждом расслоении $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W (f^*)$ имеется связность Гаусса—Манина. Оператор монодромии связности не имеет жордановых клеток. Произвольный оригинальный коэффициент, вообще говоря, не является ковариантно постоянным сечением этой связности; однако направления, определяемые его значениями, инвариантны относительно связности.

3. На пространстве $\operatorname{gr} FW$ с помощью оригинальных коэффициентов можно ввести смешанную структуру Ходжа.

Теперь приведем пример утверждения, доказательство которого основано на указанном выше изоморфизме.

Т е о р е м а 19 (см. [21]). Пусть $N: H^{n-1}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(X, \mathbb{C})$ — логарифм унипотентной части оператора монодромии. Пусть $\{\mathbf{f}\}: \mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x) \rightarrow \mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$ — оператор умножения на $\mathbf{f}$. Тогда для любого $j \geq 0$

$$\dim(\ker(\{\mathbf{f}\}^j)) \leq \dim(\ker(N^j)),$$

где $\dim(\ker(\))$ — размерность ядра оператора.

С л е д с т в и е [21]. Если оператор $\{\mathbf{f}\}$ не имеет жордановых клеток размера j , то таких клеток нет и у оператора монодромии.

Например, в квазиоднородном случае $\{\mathbf{f}\}$ — нулевой оператор, поэтому оператор монодромии диагонализруется.

Набросок доказательства. Жорданова структура оператора $\{f\}$ совпадает с жордановой структурой оператора умножения на f в $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$. Доказывается, что оператор умножения на f переводит $FW_{(\alpha, l)}$ в $FW_{(\alpha+1, l-2)}$ для любых (α, l) (см. доказательство леммы 13.12). Поэтому $\{f\}$ индуцирует оператор $\text{gr } \{f\}: \text{gr } FW \rightarrow \text{gr } FW$, переводящий $\text{gr}_{(\alpha, l)} FW$ в $\text{gr}_{(\alpha+1, l-2)} FW$ для любых (α, l) . Очевидно, что жордановы структуры оператора $\{f\}$ и оператора $\text{gr } \{f\}$ связаны соотношением

$$\dim(\ker(\{f\}^j)) \leq \dim(\ker((\text{gr } \{f\})^j))$$

для любого $j \geq 0$.

Далее с использованием теоремы 13.3 о смешанной структуре Ходжа доказывается, что при изоморфизме пространства $\text{gr } FW$ с пространством оригинальных коэффициентов оператор $\text{gr } \{f\}$ переходит в оператор N , умноженный на каждом слагаемом пространства $\text{gr } FW$ на соответствующее отличное от нуля число. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В [22] доказано следующее утверждение. Назовем *длиной спектра* критической точки ростка f разность между наибольшим и наименьшим спектральными числами. Если j больше длины спектра, то $\{f\}^j = 0$, другими словами, $f^j \in \mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Поскольку спектр принадлежит интервалу $(-1, n-1)$, всегда $f^n \in (\partial f/\partial x)$ (см. [131, 180]).

§ 15. Отображение периодов и форма пересечений

Пусть заданы гладкое расслоение и дифференциальная форма на пространстве расслоения, замкнутая на слоях. В такой ситуации возникает отображение периодов формы — многозначное отображение базы расслоения в когомологии слоя. Точке базы сопоставляется класс когомологий формы в слое над точкой, перенесенный в когомологии отмеченного слоя. Многозначность возникает в силу неоднозначности выбора пути перенесения.

Обозначим форму через ω . Выделим базис $\delta_1^0, \dots, \delta_\mu^0$ гомологий отмеченного слоя в размерности, равной размерности формы. Распространим базис по непрерывности в соседние слои и построим многозначное, непрерывно зависящее от точки базы семейство $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ базисов гомологий слоев расслоения. Базис $\delta_1^0, \dots, \delta_\mu^0$ определяет координаты в когомологиях отмеченного слоя. В этих координатах отображение периодов имеет вид

$$\lambda \mapsto \left(\int_{\delta_1(\lambda)} \omega, \dots, \int_{\delta_\mu(\lambda)} \omega \right),$$

где λ — точка базы расслоения.

Отображение периодов позволяет переносить на базу расслоения структуры, имеющиеся в пространстве когомологий. Например, индекс пересечения классов когомологий средней размерности в

когомологиях слоя переходит в билинейную форму на касательном расслоении базы (если сама дифференциальная форма имеет среднюю размерность).

В этом параграфе рассматриваются отображения периодов в расслоении Милнора, связанном с версальной деформацией критической точки функции. В этом случае размерность базы равна размерности средних когомологий слоя. Оказывается, что для почти всех дифференциальных форм отображение периодов невырождено и в естественном смысле не зависит от дифференциальной формы, его определяющей. Это означает, что конструкции, связанные с отображением периодов, определяются расслоением и, в конечном счете, критической точкой.

В параграфе рассматривается билинейная форма, возникающая на базе расслоения (т. е. на дополнении к дискриминанту) из индекса пересечения. Доказывается, что при некоторых условиях билинейная форма аналитически продолжается на всю базу версальной деформации.

В ряде случаев эта билинейная форма является симплектической структурой. Оказывается, страты базы версальной деформации имеют в этой симплектической структуре особые лагранжевы свойства, отражающие типы распадения критической точки на более простые. Некоторые из стратов доставляют важные примеры лагранжевых многообразий с особенностями.

15.1. Конструкции.

А. Определения. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в критической точке кратности μ . Определим расслоение, в котором будем изучать отображения периодов. Это расслоение является расслоением гиперповерхностей нулевых уровней функций, составляющих минимальную версальную деформацию ростка.

А именно, зафиксируем представителя версальной деформации ростка f в виде

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_\mu \varphi_\mu(x),$$

где функции $\varphi_1 \equiv 1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ порождают базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Выберем достаточно малый шар $B = \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x| < \rho\}$. В зависимости от ρ выберем достаточно малый шар $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}^\mu \mid |\lambda| < \delta\}$. Обозначим через Σ гиперповерхность всех тех $\lambda \in \Lambda$, для которых локальное множество нулевого уровня $X_\lambda = \{x \in B \mid F(x, \lambda) = 0\}$ особа. Гиперповерхность Σ называется **дискриминантом**.

Над дополнением $\Lambda \setminus \Sigma$ к дискриминанту многообразия $\{X_\lambda\}$ образуют локально тривиальное расслоение.

З а м е ч а н и е. Это расслоение отличается от расслоения Милнора деформации F (см. п. 10.3). Чтобы получить это расслоение из расслоения Милнора деформации F , нужно ограничить расслоение Милнора на множество нулевых значений деформации F .

Расслоение над $\Lambda \setminus \Sigma$ будем называть *центральным* расслоением Милнора.

Обозначим через Ω^p пространство голоморфных p -форм на $B \times \Lambda$. Рассмотрим произвольную $(n-1)$ -форму $\omega \in \Omega^{n-1}$. Ее ограничение на произвольный слой центрального расслоения Милнора — замкнутая форма. *Отображением периодов* формы ω назовем сечение

$$P_\omega: \lambda \mapsto [\omega|_{X_\lambda}] \in H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$$

расслоения $(n-1)$ -мерных когомологий, ассоциированного с центральным расслоением Милнора (более коротко: центрального когомологического расслоения Милнора). Для каждого целого $k \geq 0$ назовем k -м *присоединенным отображением периодов* формы ω сечение

$$P_\omega^k = (\nabla_{\partial/\partial \lambda_1})^k P_\omega$$

того же расслоения (здесь $\nabla_{\partial/\partial \lambda_1}$ — дифференцирование в связности Гаусса—Манина вдоль векторного поля $\partial/\partial \lambda_1$; напомним, что λ_1 — свободный член версальной деформации).

Замечание. Пусть $\delta_1(\lambda), \dots, \delta_\mu(\lambda)$ — базис в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{Z})$, непрерывно зависящий от λ . В этом базисе

$$P_\omega^k(\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \right)^k \left(\int_{\delta_1(\lambda)} \omega, \dots, \int_{\delta_\mu(\lambda)} \omega \right).$$

Назовем отображение P_ω^k *невыврожденным*, если векторы $v_i(\lambda) = (\nabla_{\partial/\partial \lambda_i} P_\omega^k)|_\lambda$, $i = 1, \dots, \mu$, линейно независимы для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, достаточно близких к началу координат в Λ (т. е. если отображение P_ω^k , записанное в координатах в ковариантно постоянном базисе, задает многозначное отображение в $\mathbb{C}^\mu$ с якобианом, отличным от нуля для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, достаточно близких к началу координат);

инфинитезимально невыврожденным (инф. невыврожденным), если на оси λ_1 , проходящей через начало координат в Λ , определитель матрицы, составленной из координат векторов $\{v_i\}$ в ковариантно постоянном базисе, имеет при $\lambda_1 \rightarrow 0$ нуль порядка $\mu(n-2k-2)/2$.

Замечание. Координаты векторов $\{v_i\}$ в ковариантно постоянном базисе многозначны, однако квадрат определителя матрицы, составленной из координат, — однозначная голоморфная функция в $\Lambda \setminus \Sigma$, мероморфная в Λ (см. теорему 12.2).

Можно показать, что свойство отображения P_ω^k быть инф. невыврожденным определяется конечной струей формы ω в точке $0 \times 0 \in B \times \Lambda$ (см. формулы (3), (4) на стр. 209 и лемму 12.3).

Будем говорить, что свойство инф. невыврожденности k -х присоединенных отображений периодов является *общим* при данном k , если струи, определяющие инф. невыврожденные отображения, составляют в пространстве струй достаточно высокого порядка дополнение к собственному аналитическому подмножеству.

Б. Невырожденность и устойчивость.

Теорема 1 (см. [27], [22, § 10]). Для любой формы $\omega \in \Omega^{n-1}$ и любого $k \geq 0$, если k -е присоединенное отображение периодов формы ω инф. невырождено, то оно невырождено.

Доказательство. Как в теореме 12.2, докажем, что квадрат определителя матрицы, составленной из координат векторов $\{v_i\}$ в ковариантно постоянном базисе, в произвольной неособой точке дискриминанта имеет нуль порядка не ниже чем $(n - 2k - 2)$. Как в следствии 1 теоремы 12.2, заключим, что квадрат определителя не обращается в нуль на $\Lambda \setminus \Sigma$ в достаточно малой окрестности начала координат в Λ . Это означает, что в окрестности начала координат в Λ матрица Якоби отображения R_ω^k невырождена.

Теорема 2 (см. [27], [22, § 10]). При $k = 0$ свойство инф. невырожденности общее. Если форма пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, невырождена, то свойство инф. невырожденности общее при любом $k \geq 0$.

З а м е ч а н и я. 1. В [27] доказано общее утверждение: если среди спектральных чисел критической точки роста $\hat{f}$ нет целых чисел, меньших k , то свойство инф. невырожденности общее для этого k . Теорема 2 вытекает из этого утверждения и теоремы 14.3.

2. Отметим следующее следствие леммы 12.3: если для данного $k \geq 0$ существует инф. невырожденное отображение периодов R_ω^k , то свойство инф. невырожденности для этого k общее.

Определим понятие эквивалентных отображений периодов. Неформальное определение: два отображения периодов назовем эквивалентными, если существует диффеоморфизм пары Λ, Σ , обладающий свойством: первое отображение равно суперпозиции диффеоморфизма и второго отображения. Это определение требует уточнения ввиду неоднозначности отображения периодов. Кроме того, мы будем рассматривать диффеоморфизмы не всего Λ , а лишь окрестности начала координат.

О п р е д е л е н и е. Два отображения R_ω^k, R_η^k назовем эквивалентными, если существует окрестность U начала координат в Λ и непрерывное отображение $H: U \times [0, 1]$, обладающее свойствами:

- а) $H(\cdot, 0)$ — тождественное отображение;
- б) $H(\cdot, s)$ при любом $s \in [0, 1]$ — голоморфное отображение с ненулевым якобианом;
- в) при любом $s \in [0, 1]$ точка $H(\lambda, s)$ принадлежит Σ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Sigma$;
- г) $U \cap H(U, 1)$ содержит начало координат;
- д) для любого $\lambda \in U \setminus (U \cap \Sigma)$ вектор $R_\omega^k(\lambda)$, параллельно перенесенный в связности Гаусса — Манина вдоль кривой $H(\lambda, \cdot)$ в точку $H(\lambda, 1)$, равен значению в этой точке сечения R_η^k .

Теорема 3 (см. [27]). 1. Любое инф. невырожденное k -е присоединенное отображение периодов R_ω^k устойчиво, т. е. k -е присоединенные отображения периодов R_η^k для всех форм η , близких к ω , эквивалентны R_ω^k .

2. Если $\mathbf{f}$ — квазиоднородный росток, то все инф. невырожденные k -е присоединенные отображения периодов эквивалентны.

Доказательство. Пусть форма ω зависит от параметра, и при нулевом значении параметра соответствующее k -е присоединенное отображение периодов инф. невырождено. Докажем, что для всех малых значений параметра соответствующие k -е присоединенные отображения периодов эквивалентны. Для этого построим зависящее от параметра голоморфное векторное поле в окрестности начала координат в Λ , которое при каждом значении параметра касается Σ и поток которого устанавливает одновременно требуемую эквивалентность всех отображений с малыми значениями параметра. Поле строится сначала на $\Lambda \setminus \Sigma$, затем проверяется, что поле голоморфно продолжено на Σ и это голоморфное продолжение касается Σ .

Легко видеть, что требуемое поле на $\Lambda \setminus \Sigma$ существует и единственно. Действительно, рассмотрим k -е присоединенные отображения как многозначные отображения в когомологии отмеченного слоя. Каждая кривая потока требуемого поля должна соединять точки с равными образами относительно k -х присоединенных отображений периодов рассматриваемого однопараметрического семейства. Поскольку при малых значениях параметра эти отображения в окрестности каждой точки являются диффеоморфизмами в когомологии отмеченного слоя, через каждую точку из $\Lambda \setminus \Sigma$ можно провести — и только единственным способом — параметризованную кривую точек, имеющих единый образ.

Утверждение о том, что построенное поле голоморфно продолжается на Σ и голоморфное продолжение касается Σ , достаточно проверить около неособых точек дискриминанта. Тогда в произвольной точке дискриминанта утверждение будет следовать из стандартной теоремы о стирании особенностей в коразмерности 2. Проверка утверждения около неособых точек дискриминанта проводится с помощью явных формул, аналогичных формулам леммы 12.2 (при $k=0$ — с помощью формул леммы 12.2); см. [27].

Вторая часть теоремы следует из первой части и теоремы В. М. Закалюкина [245], утверждающей, что для квазиоднородного ростка $\mathbf{f}$ векторное поле на Λ , касающееся дискриминанта, необходимо равно нулю в начале координат.

В. Форма пересечений в кокасательном расслоении. Каждому невырожденному отображению периодов P_ω^k отвечает естественный изоморфизм расслоений

$$T_*(\Lambda \setminus \Sigma) \rightarrow H^{n-1}$$

и двойственный ему изоморфизм

$$H_{n-1} \rightarrow T^*(\Lambda \setminus \Sigma).$$

Здесь T_* и T^* — соответственно касательное и кокасательное расслоение, H_{n-1} и H^{n-1} — соответственно гомологическое и когомологическое центральные расслоения Милнора.

З а м е ч а н и е. Здесь и далее подразумевается, что изоморфизмы определены лишь над окрестностью начала координат в Λ (см. определение невырожденности).

В слоях гомологического расслоения имеется билинейное спаривание — индекс пересечения циклов средней размерности в X_λ . Таким образом, невырожденное отображение периодов R_ω^k определяет форму пересечений Φ_ω^k на кокасательном расслоении $T^*(\Lambda \setminus \Sigma)$.

Теорема 4 (см. [27]). *Форма Φ_ω^k голоморфна в $\Lambda \setminus \Sigma$. Если R_ω^k инф. невырождено и $k \geq [(n-1)/2]$, то форма Φ_ω^k голоморфно продолжается на $T^*\Lambda$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно, поскольку форма Φ_ω^k индуцируется из постоянной формы голоморфным отображением. Второе утверждение достаточно проверить около неособых точек дискриминанта. Около таких точек матрица Якоби k -го присоединенного отображения периодов явно выписывается с помощью формул леммы 12.2. Форма Φ_ω^k индуцируется из постоянной формы с помощью матрицы, обратной к сопряженной с матрицей Якоби. Поэтому теорема справедлива, если разложения в ряды (аналогичные рядам, указанным в лемме 12.2) координат обратной матрицы содержат только неотрицательные степени параметров. Непосредственно проверяется, что при указанных k это так; см. [27].

Теорема 5 (см. [27]). *Форма пересечений Φ_ω^k , отвечающая инф. невырожденному R_ω^k , устойчива, т. е. формы пересечений Φ_η^k для всех форм η , близких к ω , переходят в Φ_ω^k при подходящем голоморфном диффеоморфизме пары Λ, Σ в себя. Если $\mathbf{f}$ — квазиоднородный росток, то форма Φ_ω^k , отвечающая инф. невырожденному R_ω^k , определена инвариантно с точностью до диффеоморфизма пары Λ, Σ в себя.*

Теорема 5 — прямое следствие теоремы 3.

Г. Ядерное отображение. Выясним, какой объект в касательном расслоении $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ индуцируется невырожденным присоединенным отображением периодов из формы пересечений в исчезающих гомологиях.

Пусть $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$. Форма пересечений S в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ определяет линейное отображение

$$\pi: H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C}).$$

Ядро отображения π совпадает с ядром формы S . На образе Im этого отображения корректно определена невырожденная билинейная форма S^* :

$$S^*(\alpha, \beta) = S(\pi^{-1}(\alpha), \pi^{-1}(\beta)).$$

Пусть R_ω^k — невырожденное присоединенное отображение периодов. Изоморфизм $dR_\omega^k: T_*(\Lambda \setminus \Sigma) \rightarrow H^{n-1}$ индуцирует в касательном расслоении к $\Lambda \setminus \Sigma$ распределение $\text{Im}_\omega^k: \lambda \mapsto \text{Im}_\omega^k(\lambda)$, где $\text{Im}_\omega^k(\lambda) \subset T_{*,\lambda}(\Lambda \setminus \Sigma)$ — подпространство, изоморфное подпространству

$\text{Im}(\lambda) \subset H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Корамерность этого распределения равна размерности ядра формы пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$.

На плоскостях распределения Im_ω^k корректно определена невырожденная билинейная форма пересечений Ψ_ω^k , индуцированная из формы S^* .

Оказывается, что распределение Im_ω^k интегрируется, и, более того, его интегральные многообразия являются слоями голоморфного отображения $\Lambda \setminus \Sigma$ в комплексное векторное пространство. Это отображение дается следующей геометрической конструкцией.

Рассмотрим конечномерное комплексное векторное пространство Ker всех однозначных ковариантно постоянных сечений центрального гомологического расслоения Милнора. Нетрудно убедиться, что произвольное сечение из Ker может быть получено следующим образом. Нужно выделить в слое центрального гомологического расслоения Милнора подходящий класс гомологий, принадлежащий ядру формы пересечений, и распространить его до ковариантно постоянного сечения. В частности, размерность пространства Ker равна размерности ядра формы пересечений в слоях гомологического расслоения.

С пространством Ker свяжем комплексное векторное пространство функций $\{h_\gamma\}_{\gamma \in \text{Ker}}$ на $\Lambda \setminus \Sigma$, где функция h_γ определена формулой

$$h_\gamma(\lambda) = \langle P_\omega^k(\lambda), \gamma(\lambda) \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \right)^k \int_{\gamma(\lambda)} \omega.$$

Определим голоморфное отображение

$$K_\omega^k: \Lambda \setminus \Sigma \rightarrow \text{Ker}^*,$$

где Ker^* — пространство, сопряженное с Ker . Для $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ положим значение $K_\omega^k(\lambda)$ равным линейной функции на Ker , которая на векторе $\gamma \in \text{Ker}$ равна $h_\gamma(\lambda)$. Отображение K_ω^k назовем *ядерным отображением*, ассоциированным с формой ω .

З а м е ч а н и е. Предложим эквивалентную конструкцию ядерного отображения. В центральном когомологическом расслоении H^{n-1} имеется подрасслоение Im , слоями которого являются подпространства $\{\text{Im}(\lambda)\}$. Это подрасслоение инвариантно относительно связности Гаусса—Манина. Поэтому связность Гаусса—Манина определена на фактор-расслоении H^{n-1}/Im . Нетрудно убедиться, что монодромия связности на фактор-расслоении тривиальна. Отображение периодов P_ω^k — это сечение расслоения H^{n-1} . Сечение P_ω^k индуцирует сечение фактор-расслоения. Перенос значения сечения фактор-расслоения в отмеченный слой фактор-расслоения, получим отображение базы $\Lambda \setminus \Sigma$ в пространство ковариантно постоянных сечений расслоения H^{n-1}/Im . Это и есть ядерное отображение.

Т е о р е м а 6. 1. Для любых $k \geq 0$, $\omega \in \Omega^{n-1}$ ядерное отображение K_ω^k голоморфно на $\Lambda \setminus \Sigma$ и мероморфно на Λ . Если $k=0$, то ядерное отображение голоморфно продолжается на Λ .

2. Если отображение периодов P_ω^k невырождено, то ядерное отображение имеет максимальный ранг на $\Lambda \setminus \Sigma$ в окрестности начала координат. Более того, касательные плоскости к слоям ядерного отображения совпадают с плоскостями распределения Im_λ^k .

Доказательство. П.1 — прямое следствие теорем 10.4, 10.7. Первая часть п. 2 — прямое следствие невырожденности отображения периодов. Для доказательства второй части достаточно заметить, что вектор $\xi \in T_{*,\lambda}(\Lambda \setminus \Sigma)$ принадлежит $\text{Im}_\omega^k(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\langle dP_\omega^k(\xi), \alpha \rangle = 0$ для любого класса гомологий $\alpha \in H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, принадлежащего ядру формы пересечений, т. е. тогда и только тогда, когда $\langle dh_\gamma, \xi \rangle = 0$ для любого $\gamma \in \text{Ker}$. Теорема доказана.

Следствие теоремы 3. Ядерное отображение K_ω^k и форма пересечений Ψ_ω^k на его слоях, отвечающие инф. невырожденному P_ω^k , устойчивы, т. е. пары K_η^k, Ψ_η^k для всех форм η , близких к ω , переходят в пару $K_\omega^k, \Psi_\omega^k$ при подходящем голоморфном диффеоморфизме пары Λ, Σ в себя. Если $\mathbf{f}$ — квазиоднородный росток, то пара $K_\omega^k, \Psi_\omega^k$, отвечающая инф. невырожденному P_ω^k , определена инвариантно с точностью до диффеоморфизма пары Λ, Σ в себя.

Если число n аргументов ростка $\mathbf{f}$ равно двум, теорема 13.3 о смешанной структуре Ходжа позволяет доказать невырожденность продолжения на Λ ядерного отображения $K_\omega^{k=0}$.

Теорема 7. Если $n=2, k=0$ и P_ω — инф. невырожденное отображение периодов, то ядерное отображение K_ω^0 голоморфно продолжается на Σ до отображения с максимальным рангом.

Доказательство. Необходимо проверить, что дифференциалы функций $\{h_\gamma\}_{\gamma \in \text{Ker}}$ в начале координат в Λ образуют пространство размерности, равной размерности ядра формы пересечений в гомологиях. Для этого достаточно проверить то же самое на оси λ_1 , проходящей через начало координат в Λ . Пусть $\gamma \in \text{Ker}$, тогда

$$dh_\gamma = \sum \langle \nabla_{\partial/\partial \lambda_j} P_\omega, \gamma \rangle d\lambda_j.$$

Над осью λ_1 сечение $\nabla_{\partial/\partial \lambda_j} P_\omega$ является геометрическим сечением подходящей 2-формы (см. формулы (3), (4) на стр. 209). Теперь утверждение теоремы легко следует из утверждения в) в п. 14.2.А и инф. невырожденности отображения P_ω (см. также лемму 2.4 в [22]).

Рассмотрим произвольный слой ядерного отображения K_ω^k , отвечающего невырожденному отображению периодов P_ω^k . В касательном расслоении к слою определена невырожденная форма пересечений Ψ_ω^k . Если число n аргументов ростка $\mathbf{f}$ четно, то форма пересечений Ψ_ω^k является на слое голоморфной симплектической структурой. Действительно, эта форма невырождена, кососимметрична и индуцирована голоморфным отображением из постоянной формы, в частности, замкнута. При нечетном n форма

пересечений Ψ_{ω}^k — (комплексная) голоморфная метрика на слое с нулевой кривизной (в связности, сохраняющей метрику и индуцированной из связности Гаусса—Манина).

Д. Невырожденная форма пересечений. Рассмотрим подробнее случай, когда форма пересечений в $H_{n-1}(X_{\lambda}, \mathbb{C})$ невырождена. В этом случае для невырожденного отображения R_{ω}^k форма пересечений определена на всем касательном расслоении $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$.

Теорема 8 (см. [27]). 1. Если n четно, $k = n/2 - 1$ и форма пересечений Ψ_{ω}^k отвечает инф. невырожденному отображению периодов R_{ω}^k , то она продолжается до симплектической структуры на Λ .

2. Если n нечетно, $k = (n-1)/2$ и форма Ψ_{ω}^k отвечает инф. невырожденному отображению периодов R_{ω}^k , то задаваемый ею изоморфизм $T^*(\Lambda \setminus \Sigma) \rightarrow T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ определяет изоморфизм $\mathbb{C}\{\lambda\}$ -модулей ростков в начале координат в Λ дифференциальных 1-форм и векторных полей, касающихся Σ .

Для доказательства теоремы достаточно проверить соответствующие утверждения около неособых точек дискриминанта, см. [27].

15.2. Примеры. А. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — квазиоднородный росток; $\varphi_1 \equiv 1$, $\varphi_2, \dots, \varphi_{\mu}$ — набор одночленов, проектирующихся в базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$;

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_{\mu} \varphi_{\mu}(x);$$

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{\mu}.$$

Тогда R_{ω} — инф. невырожденное отображение периодов. Действительно, согласно формулам (3), (4) на стр. 209 над осью λ_1 , проходящей через начало координат, сечения $\{\nabla_{\partial/\partial \lambda_j} R_{\omega}\}$, $j = 1, \dots, \mu$, представляются формами $\{-\varphi_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n / df\}$. Теперь утверждение следует из теоремы 13.6.

Б. См. [123, 27]. Пусть $f = x^{\mu+1}$, $\mu \geq 1$,

$$F(x, \lambda) = x^{\mu+1} + \lambda_2 x^{\mu-1} + \dots + \lambda_{\mu+1}.$$

Мы намеренно изменили принятую выше нумерацию параметров деформации: здесь индекс i параметра λ_i пропорционален его квазиоднородной степени. Выберем $\omega = x$. Ниже приведена формула для компонент $g_{k,l}$, $k, l = 2, \dots, \mu+1$, формы пересечений Φ_{ω}^0 в кокасательном расслоении. Положим $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i = 0$ при $i = 1$, $i < 0$ или $i > \mu+1$. Тогда

$$g_{k,l} = \sum_{\substack{i \geq \max(k, l) \\ i+j=k+l-2}} (i-j) \lambda_i \lambda_j + \left[1 - \min(k, l) + \frac{(k-1)(l-1)}{\mu+1} \right] \lambda_{k-1} \lambda_{l-1}.$$

В. В случае простых ростков функций нечетного числа переменных, принадлежащих классам D_{μ} и E_6 , формулы для метрики

$\Phi_{\omega}^{(n-1)/2}$ на кокасательном расслоении, отвечающей квазиоднородной форме $\text{const} \cdot x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, приведены в [43] на стр. 14.

Г. Приведем примеры симплектических структур $\Psi_{\omega}^{n/2-1}$ на базах версальных деформаций. Такие примеры известны для ростков функций двух переменных, имеющих простые критические точки.

Среди простых критических точек функций четного числа переменных невырожденные формы пересечений в исчезающих гомологиях имеют критические точки типов A_{2k} , $k \geq 1$, E_6 , E_8 ; формы пересечений критических точек типов D_{2k+1} , $k \geq 2$, E_7 имеют одномерное ядро; формы пересечений критических точек типов D_{2k} , $k \geq 2$, имеют двумерное ядро.

Объясним, как вычислить симплектическую структуру Ψ_{ω}^0 для ростков функций двух переменных, имеющих критические точки типов A_{2k} , $k \geq 1$, E_6 , E_8 , а затем приведем результаты вычислений для критических точек малых кратностей. Пусть

$$F = f(x, y) + \lambda_1 + \varphi_2(x, y) \lambda_2 + \dots + \varphi_{\mu}(x, y) \lambda_{\mu}$$

— квазиоднородная версальная деформация ростка $\hat{f}: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, имеющего критическую точку одного из типов A_{2k} , E_6 , E_8 . Пусть $\omega = y dx$. Согласно примеру А форма ω порождает инф. невырожденное отображение периодов P_{ω} . Согласно теореме 8 отвечающая отображению периодов форма пересечений Ψ_{ω} — симплектическая структура на Λ . Форма Ψ_{ω} имеет вид $\sum_{k < l} g_{k, l} d\lambda_k \wedge d\lambda_l$, где $g_{k, l}(\lambda) = \langle \nabla_{\partial/\partial \lambda_k} \omega|_{\lambda}, \nabla_{\partial/\partial \lambda_l} \omega|_{\lambda} \rangle$, $\langle, \rangle$ — форма пересечений в $H^1(X_{\lambda}, \mathbb{C})$. Мы представим каждый коэффициент $g_{k, l}(\lambda)$ как вычет подходящего выражения на алгебраической кривой

$$Y_{\lambda} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y, \lambda) = 0\}.$$

Лемма 1. Для любого $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ естественное вложение слоя X_{λ} расслоения Милнора в алгебраическую кривую Y_{λ} индуцирует изоморфизм (ко)гомологий.

Доказательство следует из того, что для квазиоднородного простого ростка $\hat{f}$ квазиоднородные степени функций $\{\varphi_j\}$ меньше квазиоднородной степени ростка $\hat{f}$.

Согласно лемме 1 коэффициент $g_{k, l}(\lambda)$ можно вычислить как индекс пересечения классов когомологий на Y_{λ} , которые изоморфны классам $\nabla_{\partial/\partial \lambda_k} \omega|_{\lambda}$, $\nabla_{\partial/\partial \lambda_l} \omega|_{\lambda}$.

Согласно формулам (3), (4) на стр. 209 указанные классы когомологий на Y_{λ} представляются формами $\omega_k = \varphi_k dx \wedge dy/d_{x, y} F$, $\omega_l = \varphi_l dx \wedge dy/d_{x, y} F$ соответственно. Чтобы вычислить индекс пересечения в $H^1(Y_{\lambda}, \mathbb{C})$ классов когомологий форм ω_k , ω_l , нужно одну из них изменить на дифференциал функции так, чтобы она стала формой с компактным носителем, затем формы нужно пере-

множить и проинтегрировать по Y_λ :

$$g_{k,l}(\lambda) = \int_{Y_\lambda} (\omega_k - d\alpha) \wedge \omega_l = - \int_{Y_\lambda} d\alpha \wedge \omega_l$$

(второе равенство справедливо, поскольку формы ω_k, ω_l голоморфны).

Воспользовавшись формулой Стокса, получаем правило для вычисления коэффициента $g_{k,l}(\lambda)$: на кривой Y_λ в окрестности ее единственной бесконечно удаленной точки представим форму ω_k в виде дифференциала голоморфной функции: $\omega_k = d\alpha$, тогда

$$g_{k,l}(\lambda) = 2\pi i \operatorname{Res}_\infty [\alpha \omega_l],$$

где $\operatorname{Res}_\infty$ — вычет в бесконечно удаленной точке.

Теперь приведем ответы.

а) Пусть $f = -y^2 + x^3$ — росток типа A_2 , $F = f + \lambda_1 x + \lambda_2$; тогда

$$\Psi_\omega = \operatorname{const} d\lambda_1 \wedge d\lambda_2.$$

б) Пусть $f = -y^2 + x^5$ — росток типа A_4 , $F = f + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x + \lambda_4$; тогда

$$\Psi_\omega = \operatorname{const} [d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + 3d\lambda_2 \wedge d\lambda_3 + \lambda_1 d\lambda_1 \wedge d\lambda_2].$$

в) Пусть $f = -y^2 + x^7$ — росток типа A_6 , $F = f + \lambda_1 x^5 + \lambda_2 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x + \lambda_6$; тогда

$$\begin{aligned} \Psi_\omega = \operatorname{const} [3d\lambda_1 \wedge d\lambda_6 - 9\lambda_1 d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + \\ + 6\lambda_2 d\lambda_1 \wedge d\lambda_3 + (\lambda_3 + 3\lambda_1^2) d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 + 5d\lambda_2 \wedge d\lambda_5 + \\ + 5\lambda_1 d\lambda_2 \wedge d\lambda_3 + 15d\lambda_3 \wedge d\lambda_4]. \end{aligned}$$

г) Пусть $f = -y^3 + x^4$ — росток типа E_6 , $F = -y^3 + x^4 + \lambda_1 x^2 y + \lambda_2 xy + \lambda_3 y + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x + \lambda_6$, тогда

$$\begin{aligned} \Psi_\omega = \operatorname{const} [-3d\lambda_1 \wedge d\lambda_6 + [(5/9)\lambda_1^3 - 27\lambda_4] d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + \\ + 2\lambda_1^2 d\lambda_1 \wedge d\lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 - (15/2) d\lambda_2 \wedge d\lambda_5 + 15d\lambda_3 \wedge d\lambda_4]. \end{aligned}$$

Д. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в критической точке кратности μ , F — представитель версальной деформации, $\omega \in \Omega^{n-1}$ — форма, определяющая невырожденное отображение периодов R_ω^k для некоторого k . Пусть форма пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ невырождена и, следовательно, на $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ определена невырожденная форма Ψ_ω^k . Предположим, что f, F, ω вещественны на вещественных частях областей определения. Обсудим, в какой степени вещественна форма Ψ_ω^k на вещественной части своей области определения, т. е. на $T_*(\mathbb{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma))$.

Теорема 9. В сделанных предположениях форма пересечений Ψ_ω^k на $T_*(\mathbb{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma))$ принимает только вещественные значения, если n нечетно, и принимает только чисто мнимые значения, если n четно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}|_{\mathbb{R}^n}, F|_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu) \cap (B \times \Lambda)}, \omega|_{T_*((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu) \cap (B \times \Lambda))}$ вещественны. Пусть λ принадлежит $\mathbb{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma)$. Отображение dP_ω^k переводит $T_\lambda(\mathbb{R}^\mu)$ в μ -мерное вещественное подпространство $(H_\mathbb{R})$ в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Нужно выяснить, какие значения принимает форма пересечений на парах векторов из $H_\mathbb{R}$. Опишем $H_\mathbb{R}$.

Рассмотрим $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{R})$ как подпространство в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. На каждом из этих пространств действует инволюция, индуцированная комплексным сопряжением: $(x, \lambda) \mapsto (\bar{x}, \bar{\lambda})$, где $(x, \lambda) \in X_\lambda$. Разложим пространство $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{R})$ в прямую сумму подпространств, составленных соответственно из инвариантных и антиинвариантных классов когомологий:

$$H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{R}) = I \oplus A.$$

Лемма 2. $H_\mathbb{R} = I \oplus iA$, где $i^2 = -1$.

Доказательство легко следует из того, что классы когомологий $\{\nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega^k\}$ представляются на X_λ голоморфными формами, вещественными на вещественной части многообразия X_λ .

Закончим доказательство теоремы. Инволюция σ комплексного сопряжения меняет ориентацию на X_λ , если n четно, и не меняет ориентации при нечетном n . Поэтому $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\langle \sigma \cdot, \sigma \cdot \rangle$, если n четно, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \sigma \cdot, \sigma \cdot \rangle$, если n нечетно. Из этих формул легко следует, что при четном n ограничение формы пересечений на каждое из подпространств I, A равно нулю, а при n нечетном классы когомологий из разных подпространств I, A не пересекаются. Теорема доказана.

Е. Приведем примеры ядерных отображений K_ω^k .

Пусть $\mathbf{f} = -y^2 + x^4$ —росток типа A_3 ,

$$F = -y^2 + x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3, \quad \omega = y dx.$$

В этом случае ядро формы пересечений в $H_1(X_\lambda, \mathbb{C})$ одномерно. $K_\omega^0 = \text{const } \lambda_2$.

Пусть $\mathbf{f} = -y^2 + x^6$ —росток типа A_5 ,

$$F = -y^2 + x^6 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5, \quad \omega = y dx.$$

Ядро формы пересечений одномерно. $K_\omega^0 = \text{const} \cdot (\lambda_3 + \lambda_1^2)$.

Пусть $\mathbf{f} = -y^2 + x^8$ —росток типа A_7 , F, ω аналогичны предыдущим. Тогда $K_\omega^0 = \text{const} (\lambda_4 - \lambda_2 \lambda_1 / 2)$.

Пусть $\mathbf{f} = -y^3 + x^3$ —росток типа D_4 ,

$$F = -y^3 + x^3 + \lambda_1 xy + \lambda_2 y + \lambda_3 x + \lambda_4, \quad \omega = y dx.$$

В этом случае ядро формы пересечений двумерно. С точностью до линейного преобразования образа ядерное отображение K_ω^0 имеет вид $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mapsto (\lambda_2, \lambda_3)$.

15.3. Ограничение симплектической структуры в базе версальной деформации на страт дискриминанта содержит информацию о вырождениях над стратом. Предположим, что число n переменных ростка f четно и форма пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ невырождена (в частности, μ четно). В этом случае форма пересечений $\Psi_\omega^{n/2-1}$ (для инф. невырожденного отображения периодов $P_\omega^{n/2-1}$) задает симплектическую структуру на Λ . Разобьем дискриминант Σ на страты в соответствии с типами вырождений нулевого уровня X_λ .

Принцип. Типы вырождений нулевого уровня отражены в лагранжевых свойствах стратов дискриминанта относительно симплектической структуры $\Psi_\omega^{n/2-1}$ (см. [27]).

Проиллюстрируем принцип на примерах.

Пусть точке $\lambda \in \Sigma$ соответствует многообразие X_λ с ровно $\mu/2$ невырожденными особыми точками. Циклы, исчезающие в этих точках, не пересекаются, поэтому порожденное ими подпространство в пространстве гомологий неособого слоя лагранжево. Оказывается, что такие λ образуют в Λ лагранжево подмногообразие относительно симплектической структуры $\Psi_\omega^{n/2-1}$. Более точно, положим

$\Sigma_0 = \{\lambda \in \Sigma \mid X \text{ имеет } \mu/2 \text{ особых точек, причем все они невырождены}\}.$

Теорема 10 (см. [27]). Σ_0 — лагранжево подмногообразие симплектического пространства $(\Lambda, \Psi_\omega^{n/2-1})$.

Примеры 1. Среди критических точек ростков функций двух переменных невырожденную форму пересечений имеют критические точки, у которых ростки кривой критического уровня неприводимы. В этом случае, деформируя кривую критического уровня, нетрудно убедиться, что многообразие Σ_0 не пусто.

2. Для ростков типа A_{2k} многообразие Σ_0 изоморфно подмногообразию в пространстве B^{2k+1} многочленов вида

$$x^{2k+1} + \lambda_1 x^{2k-1} + \dots + \lambda_{2k-1},$$

состоящему из многочленов с k корнями кратности 2. Можно показать, что подмногообразие этого же пространства, состоящее из многочленов с корнем кратности $k+1$, является лагранжевым в некоторой другой симплектической структуре (в линейном пространстве бинарных форм нечетной степени имеется ровно одна (с точностью до множителя) ненулевая SL_2 -инвариантная внешняя 2-форма, это и есть другая симплектическая структура; см. [42]).

Теорема 11 (см. [27]). Два аффинных алгебраических многообразия в B^{2k+1}

$$\Sigma_1 = \{P_{2k+1} \in B^{2k+1} \mid P_{2k+1} = (x-a)^{k+1} P_k, \quad a \in \mathbb{C}, P_k \in B^k\}$$

и

$$\Sigma_2 = \{P_{2k+1} \in B^{2k+1} \mid P_{2k+1} = (x-a)^2 P_k^2, \quad a \in \mathbb{C}, P_k \in B^k\}$$

изоморфны.

Теорема 11 доказывается предъявлением явной формулы автоморфизма пространства B^{2k+1} , переводящего одно многообразие в другое.

Доказательство теоремы 10. Согласно теореме Тессье [224] Σ_0 есть трансверсальное пересечение $\mu/2$ неособых листов дискриминанта Σ и, следовательно, является неособым многообразием размерности $\mu/2$.

Обозначим через W окрестность точки $\lambda^0 \in \Sigma_0$ в многообразии Σ_0 . Положим $R_+ = \{t \in R \mid t \geq 0\}$, $U = R_+ \times W = \{\lambda = \lambda^1 + te_1 \mid \lambda^1 \in W, t \in R_+, e_1 \text{ — орт оси } \lambda_1 \text{ в } \Lambda\}$ (мы фиксируем линейную структуру в Λ).

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{\mu/2}$ — циклы, исчезающие при $t \rightarrow 0$. Тогда плоскость $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_{\mu/2} \rangle$ в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, $\lambda \in U \setminus W$, лагранжева. Дополним $\{\gamma_i\}$ циклами $\{\delta_i\}$ до симплектического базиса в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Согласно лемме 12.2

$$\int_{\gamma_i} \omega = t^{n/2} \varphi_i, \quad \int_{\delta_i} \omega = t^{n/2} \ln t \varphi'_i + \varphi''_i,$$

где $\varphi_i, \varphi'_i, \varphi''_i$ — аналитические функции координат (t, λ^1) на U . Поэтому отображение периодов $P_\omega^{n/2-1}$ задает семейство p_t голоморфных отображений подмногообразия W в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, непрерывно зависящее от параметра $t \in R_+$, при этом $p_0(W) |_{\langle \gamma_1, \dots, \gamma_{\mu/2} \rangle} \equiv 0$. Последнее означает, что ограничение формы пересечений $\langle, \rangle$ в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ на $p_0(W)$ нулевое. Так как форма $\Psi_\omega^{n/2-1}$ аналитична в Λ , имеем

$$\Psi_\omega^{n/2-1} \Big|_W = \lim_{t \rightarrow 0} \Psi_\omega^{n/2-1} \Big|_{W+te_1} = \lim_{t \rightarrow 0} p_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle = p_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle = 0.$$

Теорема доказана.

Сформулируем теорему, обобщающую теорему 10 и доказывающуюся аналогично.

Пусть $f_1, \dots, f_k: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — ростки голоморфных функций с конечнократными критическими точками. В базе Λ версальной деформации ростка $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ выделим неособое подмногообразие $\Sigma_{f_1, \dots, f_k}$, состоящее из всех точек $\lambda \in \Sigma$, для которых $F(\cdot, \lambda)$ имеет k критических точек $x_1(\lambda), \dots, x_k(\lambda)$, эквивалентных критическим точкам ростков $f_1, \dots, f_k$, соответственно.

Пусть точка $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ расположена достаточно близко к $\lambda_0 \in \Sigma_{f_1, \dots, f_k}$. Тогда циклы в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, исчезающие в точке $x_i(\lambda_0)$, порождают подпространство L_i в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Подпространства $\{L_i\}$ обладают свойствами:

а) ограничение формы пересечений $\langle, \rangle$ в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ на L_i изоморфно форме пересечений в гомологиях, исчезающих в критической точке ростка f_i ;

б) сумма L подпространств $\{L_i\}$, $i = 1, \dots, k$, является прямой;

в) $\langle L_i, L_j \rangle = 0$ при $i \neq j$;

г) L_i инвариантно относительно локальной монодромии точки λ_0 . Предположим, что n четно и спектральные числа ростков $f_1, \dots, f_k$ лежат в интервале $(n/2 - 2, n/2)$. (Это так, например, для ростков, стабильно эквивалентных росткам функций двух переменных.)

Теорема 12. Пусть n четно и форма $\Psi_\omega^{n/2-1}$ отвечает инф. невырожденному отображению периодов $R_\omega^{n/2-1}$. Тогда

1. (См. [27].) Ограничение симплектической структуры $\Psi_\omega^{n/2-1}$ на подпространство $T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1, \dots, f_k})$ может быть индуцировано из формы пересечений в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ подходящим линейным отображением в аннулятор подпространства $L \subset H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$.

2. Если дополнительно известно, что критические точки всех ростков $f_1, \dots, f_k$ простые, то ограничение на $T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1, \dots, f_k})$ симплектической структуры $\Psi_\omega^{n/2-1}$ изоморфно ограничению формы пересечений в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ на аннулятор подпространства $L \subset H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$.

Следствие части 1.

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker} (\Psi_\omega^{n/2-1} | T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1, \dots, f_k})) \geq \sum_{i=1}^k \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker} (\langle, \rangle_{f_i}),$$

где $\langle, \rangle_{f_i}$ — форма пересечений в гомологиях, исчезающих в критической точке ростка f_i .

Добавление. Во время печатания книги появилось много новых работ (см. [240—346]). Мы отметим здесь лишь доказательство гипотез полунепрерывности спектра ([254, 255, 264, 343]), теорию раскрытых ласточкиных хвостов, открытие связи лагранжевых и лежандровых многообразий с особенностями симплектическими и контактными структурами многообразий бинарных форм и многочленов ([271, 302]), включение в теорию особенностей групп отражений H_3 и H_4 ([282, 299, 268]), классификацию проектирований двумерных поверхностей общего положения из трехмерного пространства на плоскость ([262, 288, 289]) и вычисление кольца лежандровых кобордизмов ([304—306]). С новыми достижениями можно познакомиться по обзорам [262, 300, 276, 260, 341].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебраические поверхности. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXV.— М.: Наука, 1965.
2. Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм.— Функц. анализ, 1971, т. 5, вып. 3, с. 1—9.
3. Арнольд В. И. Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий.— Функц. анализ, 1972, т. 6, вып. 3, с. 61—62.
4. Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера.— УМН, 1973, т. 28, вып. 5, с. 17—44.
5. Арнольд В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы.— УМН, 1975, т. 30, вып. 5, с. 3—65.
6. Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей.— Труды семинара С. Л. Соболева, 1976, № 1, с. 5—15.
7. Арнольд В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского — Олейник и смешанные структуры Ходжа.— Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 1, с. 1—14.
8. Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k , C_k , F_4 и особенности эволют.— УМН, 1978, т. 33, вып. 5 (203), с. 91—105.
9. Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий.— Вестник МГУ, сер. Математика, 1979, № 6, с. 7—17.
10. Бернштейн Д. Н. Число корней системы уравнений.— Функц. анализ, 1975, т. 9, вып. 3, с. 1—4.
11. Бернштейн Д. Н., Кушниренко А. Г., Хованский А. Г. Многогранники Ньютона.— УМН, 1976, т. 31, вып. 3, с. 201—202.
12. Бернштейн И. Н. Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру.— Функц. анализ, 1972, т. 6, вып. 4, с. 26—40.
13. Бернштейн Н. И., Гельфанд С. И. Мероморфность функции R^λ .— Функц. анализ, 1969, т. 3, вып. 1, с. 84—86.
14. Брискорн Э. Монодромия изолированных особенностей гиперповерхностей.— Математика, 1971, т. 15, вып. 4, с. 130—160.
15. Брискорн Э. О группах кос (по В. И. Арнольду).— Математика, 1974, т. 18, вып. 3, с. 46—59.
16. Бурбаки Н. Группы Ли и алгебры Ли.— М.: Мир, 1972.
17. Варченко А. Н. Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и семейств полиномиальных отображений.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1972, т. 36, вып. 5, с. 957—1019.
18. Варченко А. Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов.— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 3, с. 13—38.
19. Варченко А. Н. Ходжевы свойства связности Гаусса — Манина.— Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 1, с. 46—47.
20. Варченко А. Н. Асимптотики голоморфных форм определяют смешанную структуру Ходжа.— ДАН СССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1035—1038.

21. В а р ч е н к о А. Н., Об операторе монодромии в исчезающих когомологиях и об операторе умножения на f в локальном кольце.— ДАН СССР, 1981, т. 260, № 2, с. 272—276.
22. В а р ч е н к о А. Н. Асимптотическая структура Ходжа в исчезающих когомологиях.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1981, т. 45, с. 540—591.
23. В а р ч е н к о А. Н. Комплексный показатель особенности не меняется вдоль страта $\mu = \text{const}$.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 1, с. 1—12.
24. В а р ч е н к о А. Н. О числе целых точек в области.— УМН, 1982, № 37, вып. 3, с. 177—178.
25. В а р ч е н к о А. Н. О числе целых точек в семействах гомотетичных областей.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 2, с. 1—6.
26. В а р ч е н к о А. Н. Оценка коразмерности страта $\mu = \text{const}$ снизу через смешанную структуру Ходжа.— Вестник МГУ, серия Матем., 1983.
27. В а р ч е н к о А. Н., Г и в е н т а л ь А. Б. Отображение периодов и форма пересечений.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 1, с. 1—14.
28. В а р ч е н к о А. Н., М о л ч а н о в С. А. Применение метода стационарной фазы в предельных теоремах для цепей Маркова.— ДАН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 11—14.
29. В а с и л ь е в В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума.— Функц. анализ, 1977, т. 11, вып. 3, с. 1—11.
30. В а с и л ь е в В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов в комплексной области.— Функц. анализ, 1979, т. 13, вып. 4, с. 1—12.
31. В и н о г р а д о в И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел.— М.: Наука, 1971.
32. В и н о г р а д о в И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм.— М.: Мир, Наука, 1976.
33. В и р о О. Я. Обобщения неравенств Петровского и Арнольда на кривые с особенностями.— УМН, 1978, т. 33, вып. 3, с. 145—146.
34. В и р о О. Я. Построение M -многообразий.— УМН, 1979, т. 34, вып. 4, с. 160.
35. В и р о О. Я. Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл.— ДАН, 1980, т. 254, № 6, с. 1306—1310.
36. Г а б р и э л о в А. М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей.— Функц. анализ, 1973, т. 7; вып. 3, с. 18—32.
37. Г а б р и э л о в А. М. Бифуркации, диаграммы Дынкина и модальность изолированных особенностей.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 2, с. 7—12.
38. Г а б р и э л о в А. М. Диаграммы Дынкина унимодальных особенностей.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 3, с. 1—6.
39. Г а б р и э л о в А. М., К у ш н и р е н к о А. Г. Описание деформаций с постоянным числом Милнора для однородных функций.— Функц. анализ, 1975, т. 9, вып. 4, с. 67—68.
40. Г а н н и н г Р., Р о с с и Х. Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.
41. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними, вып. I.— М.: Физматгиз, 1959.
42. Г и в е н т а л ь А. Б. Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кратности, и обобщенное уравнение Ньютона.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 1, с. 13—18.
43. Г и в е н т а л ь А. Б. Сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и связанных с простыми особенностями функций.— Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 2, с. 4—14.
44. Г и й е м и н В., С т е р н б е р г С. Геометрические асимптотики.— М.: Мир, 1981.
45. Г о д б и й о н К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.— М.: Мир, 1973.
46. Г о р и н Е. А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций.— УМН, 1961, т. 16, вып. 1, с. 91—118.

47. Горюнов В. В. Присоединения спектров некоторых особенностей.— Вестник МГУ, сер. Матем., 1981, № 4, с. 19—22.
48. Горюнов В. В. Геометрия бифуркационных диаграмм простых проектирований на прямую.— Функц. анализ, 1981, т. 15, вып. 2, с. 1—8.
49. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий.— УМН, 1974, т. 29, вып. 4, с. 3—79.
50. Гудков Д. А., Крахнов А. Д. О периодичности эйлеровой характеристики вещественных алгебраических $M-1$ -многообразий.— Функц. анализ, 1974, т. 7, вып. 2, с. 15—19.
51. Гусейн-Заде С. М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей функций двух переменных.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 1, с. 11—15.
52. Гусейн-Заде С. М. Диаграммы Дынкина особенностей функций двух переменных.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 4, с. 23—30.
53. Гусейн-Заде С. М. О характеристическом многочлене классической монодромии для серий особенностей.— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 3, с. 78—79.
54. Гусейн-Заде С. М. Группы монодромии изолированных особенностей гиперповерхностей.— УМН, 1977, т. 32, вып. 2(194), с. 23—65.
55. Гусейн-Заде С. М. Об отмеченных базисах простых особенностей.— Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 4, с. 73—74.
56. Данилов В. И. Многогранники Ньютона и исчезающие когомологии.— Функц. анализ, 1979, т. 13, вып. 2, с. 32—47.
57. Долгачев И. В., Никулин В. В. Исключительные особенности В. И. Арнольда и $K-3$ поверхности.— Всесоюзная топологическая конференция в Минске (тезисы).— Минск, 1977.
58. Звониллов В. И. Неравенства Харламова и неравенства Петровского — Олейник.— Функц. анализ, 1975, т. 9, вып. 2, с. 69—70.
59. Казарновский Б. Я. О нулях экспоненциальных сумм.— ДАН СССР, 1981, т. 257, № 4, с. 804—808.
60. Карацуба А. А. Иван Матвеевич Виноградов (к девяностолетию со дня рождения).— УМН, 1981, т. 36, вып. 6, с. 3—15.
61. Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов в $\mathbb{R}^2$.— Доклады АН СССР, 1980, т. 254, вып. 1, с. 28—31.
62. Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов.— УМН, 1981, т. 36, вып. 4, с. 213.
63. Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической или гиперболической фазой.— Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1983, т. 9, с. 3—39.
64. Карпушкин В. Н. Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных.— Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1983, т. 10.
65. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.
66. Кушниренко А. Г. Многогранник Ньютона и числа Милнора.— Функц. анализ, 1975, т. 9, вып. 1, с. 74—75.
67. Ландис Е. Е. Оценки вариаций множеств меньших значений гладкой функции в окрестности точки минимума.— Вестник МГУ, сер. Математика, 1980, № 3, 24—28.
68. Лившиц И. С. Автоморфизмы дополнения к бифуркационному множеству функций для простых особенностей.— Функц. анализ и его прилож., 1981, т. 15, вып. 1, с. 38—42.
69. Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.— М.: ИЛ, 1961.
70. Ляшко О. В. Распадение простых особенностей функций.— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 2, с. 49—56.
71. Мазер Дж. Стратификации и отображения.— УМН, 1972, т. 27, вып. 5, с. 85—118.
72. Мальгранж Б. О полиномах И. Н. Бернштейна.— УМН, 1974, т. 29, вып. 4, с. 81—88.

73. М а м ф о р д Л. Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия.— М.: Мир, 1979.
74. М а р к у ш е в и ч А. И. Введение в классическую теорию абелевых функций.— М.: Наука, 1979.
75. М а с л о в В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.
76. М а с л о в В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.
77. М а с л о в В. П., Ф е д о р ю к М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
78. М и л н о р Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.
79. М и л н о р Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1971.
80. Н и к у л и н В. В. Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1979, т. 43, вып. 1, с. 111—177.
81. О л е й н и к О. А. Оценки чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей.— Матем. сб., 1951, т. 28, с. 635—640.
82. О л е й н и к О. А. О топологии действительных алгебраических кривых на алгебраической поверхности.— Матем. сб., 1951, т. 29, с. 133—156.
83. П е т р о в с к и й И. Г., О л е й н и к О. А. О топологии действительных алгебраических поверхностей.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, т. 13, с. 389—402.
84. П о л о т о в с к и й Г. М. Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка.— ДАН СССР, 1977, т. 236, вып. 3, с. 548—551.
85. Р о х л и н В. А. Доказательство гипотезы Гудкова.— Функц. анализ, 1972, т. 6, вып. 2, р. 62—64.
86. Р о х л и н В. А. Сравнения по модулю 16 в 16-й проблеме Гильберта.— Функц. анализ, 1972, т. 6, вып. 4, с. 58—64.
87. Р о х л и н В. А. Сравнения по модулю 16 в 16-й проблеме Гильберта. II.— Функц. анализ, 1973, т. 6, вып. 2, с. 91—92.
88. Р о х л и н В. А. Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 4, с. 71—75.
89. Р о х л и н В. А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых.— УМН, 1978, т. 33, вып. 5, с. 77—89.
90. С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли.— М.: Мир, 1969.
91. С п р и н г е р Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.
92. Т ю р и н а Г. Н. Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств.— Изв. АН, Сер. матем., 1969, т. 33, с. 1026—1058.
93. У э л л с Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1976.
94. Ф а м Ф. Обобщенные формулы Пикара—Лефшеца и ветвление интегралов.— Математика, 1969, т. 13, вып. 4, с. 61—93.
95. Ф е д о р ю к М. В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов.— Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1962, т. 2, вып. 1, с. 145—150.
96. Ф е д о р ю к М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
97. Ф о р с т е р О. Римановы поверхности.— М.: Мир, 1980.
98. Ф у к с Б. Л. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных.— М.: Физматгиз, 1963.
99. Х а р л а м о в В. М. Максимальное число компонент поверхности степени 4 в $\mathbb{R}P^3$.— Функц. анализ, 1972, т. 6, вып. 4, с. 101.
100. Х а р л а м о в В. М. Новые сравнения для эйлеровой характеристики вещественных алгебраических многообразий.— Функц. анализ, 1973, т. 7, вып. 2, с. 74—78.
101. Х а р л а м о в В. М. Обобщенное неравенство Петровского.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 2, с. 50—56.
102. Х а р л а м о в В. М. Обобщенное неравенство Петровского, II.— Функц. анализ, 1975, т. 9, вып. 3, с. 93—94.

103. Харламов В. М. Дополнительные сравнения для эйлеровой характеристики четномерных вещественных алгебраических многообразий.— Функц. анализ, 1975, т. 9, вып. 4, с. 51—60.
104. Харламов В. М. Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$.— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 4, с. 55—68.
105. Харламов В. М. Изотопические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$.— Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 1, с. 86—87.
106. Хиронака Х. Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями характеристики нуль.— Математика, 1965, т. 9, вып. 6, с. 2—70; 1966, т. 10, вып. 1, с. 3—89; 1966, т. 10, вып. 2, с. 3—58.
107. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия.— Функц. анализ, 1977, т. 11, вып. 4, с. 56—67.
108. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений.— Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 1, с. 51—61.
109. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и формула Эйлера — Якоби.— УМН, 1978, т. 33, вып. 6, с. 245—246.
110. Хованский А. Г. Индекс полиномиального векторного поля.— Функц. анализ, 1979, т. 13, вып. 1, с. 49—58.
111. Хованский А. Г. Об одном классе систем трансцендентных уравнений.— ДАН СССР, 1980, т. 255, № 4, с. 804—807.
112. Чжэнь Шэн-шен. Комплексные многообразия.— М.: ИЛ, 1961.
113. Чмутов С. В. Группы монодромии особенностей функций двух переменных.— Функц. анализ, 1981, т. 15, вып. 1, с. 61—66.
114. Чмутов С. В. О монодромии изолированных особенностей.— Труды XVI Всесоюзной алгебраической конф.— Ленинград, 1981, т. 1, с. 172—173.
115. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии.— М.: Наука, 1972.
116. A'Campo N. Le nombre de Lefschetz d'une monodromie.— Indag. Math., 1973, v. 76, № 2, p. 113—118.
117. A'Campo N. La fonction zeta d'une monodromie.— Commentarii Mathematici Helvetici, 1975, v. 50, Fase 2, p. 233—248.
118. A'Campo N. Tresses, monodromie et le groupe symplectique.— Comment Math. Helvetici, 1979, v. 54, № 2, p. 318—327.
119. A'Campo N. Le groupe de monodromie du **diploiment** des singularites isolees de courbes planes, I.— Mathematische Annalen, 1975, Bd. 213, Heft 1, S. 1—32.
120. A'Campo N. Le groupe de monodromie du **deplioiment** des singularites isolees de courbes planes, II.— In: Actes du Congres Internationale des Mathematiciens (Vancouver, 1974), 1975, v. 1, S. 1, p. 395—404.
121. Andreotti A. On Torelli's theorem.— Am. J. Math., 1958, v. 80, p. 101—121.
122. Arnold V. I. Critical points of smooth functions.— Proc. of Internat. Congress of Math. (Vancouver, 1974), v. 1, p. 19—41.
123. Arnold V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma.— Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, № 6, p. 557—582.
124. Arnold V. I. On some problems in singularity theory.— K. Patodi memorial Volume.— Bombay, 1979.
125. Atiyah M. F. Resolution of singularities and division of distributions — Comm. Pure Appl. Math., 1970, v. 23, № 2, p. 145—150.
126. Berry M. V. Waves and Thom's theorem.— Adv. Phys., 1976, v. 25, p. 1—26.
127. Berry M. V. Singularities in waves and rays.— Les Houches Summer School 1980, Amsterdam: North-Holland, 1981.
128. Berry M. V., Nye J. F. Fine structure in caustic junctions.— Nature, Lond., 1977, v. 267, p. 34—36.
129. Berry M. V., Upstill C. Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns.— Progress in optics XVIII, North-Holland, 1980.

130. B j ö r k J. E. Rings of differential operators.— North-Holland, Amsterdam, 1979.
131. B r i a n s o n J., S k o d a H. Sur la cloture integrale d'un ideal de germes de fonctions holomorphes en un point de C^n .— C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 1974, v. 278, p. 949—951.
132. B r i e s k o r n E., Special singularities-resolution, deformation and monodromy.— Amer. Math. Soc., Lecture Notes prepared in connection with the summer institute on algebraic geometry held at Humboldt State University, Arcata, California, 1974.
133. C a t t a n i E., K a p l a n A. The Monodromy Weight Filtration for a Several Variables Degeneration of Hodge Structures of Weight Two.— Inv. Math., 1979, v. 52, № 2, p. 131—142.
134. C a t t a n i E., K a p l a n A. On the local monodromy of a variation of Hodge structure.— Bull. AMS, 1981, v. 4, p. 116—118.
135. C a t t a n i E., K a p l a n A. Polarized mixed Hodge structures and the monodromy of a variation of Hodge structure.— Preprint, 1981, 1—25.
136. C h m u t o v S. V. Monodromy groups of critical points of functions.— Inven. math., 1982, v. 67, p. 123—131.
137. C l e m e n s C. H. Picard-Lefschetz theorem for families of non singular algebraic varieties acquiring ordinary singularities.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 136, p. 93—108.
138. C l e m e n s C. H. Degeneration of Kähler manifolds.— Duke Math. J., 1977, v. 44, № 2, p. 215—290.
139. C o l i n d e V e r d i e r Y. Nombre de points entiers dans une famille homothetique de domaines de R^n .— Ann. Scient. Ecole Norm. Super. Ser. 4, 1977, v. 10, № 4, p. 559—575.
140. C o r n a l b a M., G r i f f i t h s P. Some transcendental aspects of algebraic geometry.— In: Proc. of Summer Institute of AMS, Arcata, 1974.
141. D a m o n J. Topological Properties of Discrete Algebra Types.— I. The Hilbert-Samuel Function.— Adv. in Math., supp. ser., Vol. 5, 1979, p. 83—118; II. Real and Complex Algebras.— Amer. J. Math. 1979, v. 101, № 6, p. 1219—1248.
142. D a m o n J. Topological Triviality of Versal Unfoldings of Complete Intersections.— Preprint, 1980.
143. D a m o n J. Finite Determinacy and Topological Triviality. I. Invent. Math., 1980, v. 62, p. 299—324; II.— Sufficient Conditions and Topological Stability, in print.
144. D e l i g n e P. Les immenbles des groupes de tresses generalises.— Invent. Math., 1972, v. 17, № 4, p. 273—302.
145. D e l i g n e P. Theorie de Hodge I.— Proc. Internat. Congress Math. (Nice, 1970), v. 1, p. 425—430; II — Publ. Math. IHES, 1971, v. 40, p. 5—58; III — Publ. Math. IHES, 1972, v. 44, p. 5—77.
146. D e l i g n e P. Equation differentielles a points singuliers reguliers.— Lecture Notes in Math., v. 163.— Springer-Verlag, 1970.
147. D e m a z u r e M. Classification des germes a point critique isole et a nombres de modules 0 ou 1 (d'apres V. I. Arnol'd). Siminaire Bourbaki, 26e annee, 1973/74, No. 443, Fevrier 1974.
148. D u i s t e r m a a t J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and Unfoldings of singularities.— Comm. Pure Appl. Math., 1974, v. 27, № 2, p. 207—281.
149. D u r f e e A. H. Fibered knots and algebraic singularities.— Topology, 1974, v. 13, № 1, p. 47—59.
150. F u k u d a T. Types topologiques des polynomes.— Publ. IHES, 1976, v. 46, p. 87—106.
151. F u k u d a T. Local topological properties of differentiable mappings. I.— Invent. math., 1981, v. 65, № 2, p. 227—250.
152. G a b r i e l o v A. M. Polar curves and intersection matrices of singularities.— Invent. math., 1979, v. 54, № 1, p. 15—22.

153. G r e u e l G.—M., Steenbrink J. On the topology of smothable singularities.— Preprint № 31, Univ. Kaiserslautern, 1981.
154. G r i f f i t h s P. Monodromy of homology and periods of integrals on algebraic manifolds.— Notes mimeographiques, Princeton University, 1968.
155. G r i f f i t h s P. On the periods of certain rational integrals I.— Ann. Math., 1969, ser 2, v. 90, № 3, p. 460—495; II.— Ann. Math., 1969, ser. 2, v. 90, № 3, p. 496—541.
156. G r i f f i t h s P. Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussions of open problems.— Bull. Amer. Math. Soc., 1970, v. 76, p. 228—296.
157. G r i f f i t h s P., H a r r i s J. Principles of Algebraic Geometry.— John Wiley and Sons, New York, 1978.
158. G r i f f i t h s P., S c h m i d W. Recent development in Hodge theory, a discussions of techniques and results.— Proc. Internat. Colloq. on Discrete Subgroups of Lie Groups, Bombay, 1973, p. 31—127.
159. F r e s n e l A. Memoire sur la diffraction de la lumiere.— Mem. de l'Acad. des sciences, 1818, v. 5, p. 339—353.
160. H a m m H., Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. Math. Ann., 1971, 191, № 3, p. 235—252.
161. H a m m H., L e D u n g T r a n g . Un theoreme de Zariski du type de Lefschetz, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 1973, 317—356.
162. H o v a n s k y A. Sur les racines complexes de systemes d'equations algebriques ayant un petit nombre de monomes.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1981, v. 292, June, p. 937—940.
163. H o v a n s k y A. Theorema de Bezout pur les fonctions de Liouville.— Preprint, IHES, 1981, Sept., 1—31.
164. J e a n q u a r t i e r P. Development asymptotique de la distribution de Dirac.— C. R. Acad. scient. Paris, 1970, v. 271, p. 1159—1161.
165. K a s h i w a r a M. B-functions and holonomic systems. Rationality of roots of b-functions.— Invent. Math., 1976, v. 38, p. 33—53.
166. K a t z N. Nilpotent connections and the monodromy theorem. Application of a result of Turrittin.— Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1970, v. 39, p. 175—232.
167. K a t z N. M. The regularity theorem in algebraic geometry.— In: Actes Congres intern. math., 1970, v. 1, p. 437—443.
168. K e m p f G., K n u d s e n F., M u m f o r d D., S a i n t - D o n a t B. Toroidal embeddings.— Lecture Notes in Math., 1973, v. 339, Springer-Verlag.
169. K m e t y F. Resolution des singularities des Courbes.— In: Lecture Notes in Math., v. 409.
170. K o c h m a n F. Bernstein polynomials and Milnor algebræ.—Proc. N. A. Sc USA, 1976, v. 73, № 8.
171. K o u c h n i r e n k o A. G. Polyedres de Newton et nombres de Milnor.— Invent. math., 1976, v. 32, p. 1—31.
172. L a m o t k e K. Die Homologie isolierter Singularitäten.— Math. Z., 1975, Bd. 143, s. 27—44.
173. L a n d m a n A. On the Picard — Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 181, July, p. 89—126.
174. L a z z e r i F. Some remarks on the Picard — Lefschetz monodromy, en «Quelques journees singulieres». Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique.— Paris, 1974.
175. L e D u n g T r a n g . Sur les noeuds algebriques. Composition mathematica. 1972, v. 25, Fase 3, 281—321.
176. L e D u n g T r a n g . Le theoreme de la monodromie singulier. C. r. Acad. sci. Paris, 1979, AB 288, № 21, A 985—A 988.
177. L e D u n g T r a n g . La monodromie n'a pas de points fixes.— Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo, Sec. I.A., v. 22, № 3, p. 409—427.

178. Le Dung Trang., Ramanujam C. P. The invariance of Milnors number implies the invariance of the topological type.— Amer. J. Math. 1976, v. 98, p. 67—68.
179. Levine J. Polynomial invariants of knots in codimension two.— Ann. of Math., ser. II, 1966, v. 84, p. 537—554.
180. Lipman J., Tessier B. Pseudo-rational local rings and a theorem of Briancon-Skoda about integral closures of ideals.— Michigan Math. J., 1981, v. 28, p. 97—116.
181. Looijenga E. A period mapping of certain semiuniversal deformations.—Comp. math., 1975, v. 30, № 3, p. 299—316.
182. Looijenga E. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity.— Invent. Math., 1974, v. 23, № 2, p. 105—116.
183. Looijenga E. The discriminant of a real simple singularity.— Compositio Math., 1978, v. 37, Fase 1, p. 51—62.
184. Malgrange B. Le polynome de Bernstein d'une singularite isolee.— Springer lecture notes in math., 1974, v. 459, p. 98—119.
185. Malgrange B. Integrales asymptotiques et monodromie.— Ann. Sci. Ecole Norm. Super., /4/, 1974, v. 7, p. 405—430.
186. Milnor J. On the Betti numbers of real varieties.— Proc. A. M. S., 1964, v. 15, p. 275—280.
187. Nilsson N. Some growth and ramification properties of certain integrals.— Arkiv för Mat., 1965, v. 5, p. 463—476.
188. Nilsson N. Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals.— Ark. för Mat., 1980, v. 18, № 2, p. 181—198.
189. Nye J. F. Optical caustics in the near field from liquid drops.— Proc. R. Soc. Lond. A, 1978, v. 361, p. 21—41.
190. Nye J. F. Optical caustics from liquid drops under gravity: observations of the parabolic and symbolic umbilics.— Philos. Trans. R. Soc. Lond., 1979, v. 292, p. 25—44.
191. Nye J. F. The motion and structure of dislocations in wave fronts.— Proc. R. Soc. Lond. A., 1981, v. 378, p. 219—239.
192. Nye J. F., Cooley C. R., Thorndike A. S. The structure and evolution of flow fields and other vector fields.— J. Phys. A. Math. Gen., 1978, v. 11, № 8, p. 1455—1490.
193. Nye J. F., Potter J. R. The use of catastrophe theory to analyse the stability and toppling of icebergs.— Annals of Glaciology, 1980, v. 1, p. 49—54.
194. Nye J. F., Thorndike A. S. Events in evolving three-dimensional vector fields.— J. Phys. A: Math. Gen., 1980, v. 13, p. 1—14.
195. Petrovsky I. G. Sur la topologie des courbes reelles et algebriques.— C. R. Acad. Sci Paris, 1933, v. 197, p. 1270—1273.
196. Petrovsky I. G. On the topology of real plane algebraic curves.— Ann. Math., 1938, v. 39, p. 189—209.
197. Pham F. Remarque sur l'equisingularite universelle.— Faculte des Sciences, Nice, 1970, p. 1—24.
198. Pham F. Caustiques, phase stationnaire et microfonctions.— Acta Scientiarum Vietnamicarum, 1977, v. 2, № 2.
199. Pham F. Singularites des systemes differentiels de Gauss-Manin.— Boston: Birkhäuser, 1979.
200. Pham F. Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method.— Invited talk at the AMS 1981 summer institute on «Singularities», Arcata, Calif, 1981, p. 1—25.
201. Pinkham H. Singularites exceptionnelles, la dualite etrange d'Arnold et les surfaces $K=3$.— C. R. Acad Sci., Paris, 1977, v. 284, p. 615—618.
202. du Plessis A. On the determinacy of smooth map-germs.— Invent. Math., 1980, v. 58, p. 107—160.
203. du Plessis A. On the genericity of topologically finitely-determined map-germs.— Topology, 1982, v. 21, № 2, p. 131—156.
204. Randol B. A lattice point problem I.— Trans. AMS, 1966, v. 121, p. 257—268.

205. R a n d o l B. A lattice point problem II.— Trans. AMS, 1966, v. 125, p. 101—113.
206. R a n d o l B. On the Fourier transform of the indicator function of a planar set.— Trans AMS, 1969, v. 139, p. 271—278.
207. R a n d o l B. On the asymptotic Behaviour of the Fourier transform of the indicator function of a convex set.— Trans. AMS, 1969, v. 139, p. 279—285.
208. S a i t o K. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen.— Invent. math., 1971, v. 14, p. 123—142.
209. S a i t o K. On a linear structure of a quotient variety by a finite reflection group.— Preprint, Kyoto Univ., Japan, Kyoto, 1979.
210. S c h e r k J. On the Gauss—Manin connection of an isolated hypersurface singularity. Math. Ann., 1978, v. 238, № 1, p. 23—32.
211. S c h e r k J. On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities.— Invent. math., 1980, v. 58, № 3, p. 289—301.
212. S c h e r k J. A note on Two local Hodge filtrations.— Preprint, Univ. of Alberta, Edmonton, 1981, p. 1—7.
213. S c h m i d W. Variation of Hodge structures: the singularities of the period mappings.— Invent. Math., 1973, v. 22, p. 211—319.
214. S e b a s t i a n i M. Monodromie et polynome de Bernstein, d'après Malgrange.— Lecture Notes in Math., 1978, v. 670, p. 370—381.
215. S e b a s t i a n i M., T h o m R. Un resultat sur la monodromie.— Invent. Math., 1971, v. 13, № 1—2, p. 90—96.
216. S e i d e n b e r g A. A new decision method for elementary algebra.— Ann. Math., 1959, v. 60, p. 356—374.
217. S e r r e J. P. Quelques problemes globaux relatifs aux varietes de Stein.— Colloque sur les fonctions de plusieurs variables tenu a Bruxelles, Paris, 1953, p. 57—68. (Русский перевод: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. переводов.— М.: ИЛ., 1958, с. 363—371.)
218. S i e r s m a D i r k . Singularities of functions on boundaries, corners, etc. Quart. J. Math., 1981, v. 32, № 125, p. 119—127.
219. S t e e n b r i n k J. H. M. Intersection form for quasihomogeneous singularities.— Compositio Math., 1977, v. 34, Fasc. 2, p. 211—223.
220. S t e e n b r i n k J. Limits of Hodge structures.— Invent. Math., 1975, v. 31, № 3, p. 229—257.
221. S t e e n b r i n k J. Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology.— Real and complex singularities, Nordic Summer School, Oslo, 1976.
222. S t e e n b r i n k J. Mixed Hodge structures associated with isolated singularities.— Preprint, 1981, 1—46.
223. T a r n o p o l s k a - W e i s s M. On the number of lattice points in a compact n -dimensional polyhedron.— Proc. Amer. Math. Soc., 1979, v. 74, № 1, p. 124—127.
224. T e i s s i e r B. Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney.— Asterisque, 1973, v. 7, 8, p. 285—362.
225. T e i s s i e r B. Deformations a type topologique constante, I et II, in Seminaire Donady-Verdier, Secretariate Mathematique, 45 rue d'Ulm, Paris, V, 1972.
226. T e i s s i e r B. Varities polaires I. Invent. math., 1977, v. 40, № 3, p. 267—292.
227. T e r a o H. Generalized exponents of a free arrangement of hypersurfaces and Shepherd—Todd—Brieskorn formula.— Invent. math., 1981, v. 69, p. 159—170.
228. T h o m R. Sur l'homologie des varietes algebriques reelles.— In: Differential and combinatorial topology. A symposium in honor of Marston Morse. Princeton Univ. Press, 1965, p. 255—265.
229. T i m o u r i a n I. G. The invariance of Milnors number implies topological triviality.— Amer. J. Math., 1977, v. 99, No. 2, p. 437—446.
230. V a r c h e n k o A. N. The Gauss—Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial.— Bull. des sciences math., 2^e ser., 1980, v. 104, p. 205—223.
231. V a r c h e n k o A. N. Zeta-function of monodromy and Newton's diagram.— Invent. Math., 1976, v. 37, p. 253—262.

232. Verdier Stratification de Whitney et Theorems de Bertine—Sard.— Inv. math., 1976, v. 36, p. 295—312.
233. Wajnyb Bronislaw. On the monodromy group of plane curve singularities.— Math. Ann., 1980, v. 246, № 2, p. 141—154.
234. Wall C. T. C. Are maps finitely determined in general? — Bull. London Math. Soc., 1979, v. 11, p. 151—154.
235. Wall C. T. C. A note on symmetry of singularities.— Bull. London Math Soc., 1980, v. 12, № 3, p. 169—175.
236. Yano T. On the holonomic system of f^s and b -function,— Publ. RIMS, 1976, v. 12, p. 469—480.
237. Yano T. On the structure of differential equations associated with some isolated singularities.— Soc. Reports of Saitama Univ., Series A, 1977, v. 9, № 1, p. 9—20.
238. Yano T. On the Theory of b -Functions.— Publ. RIMS., 1978, v. 14, p. 111—202.
239. Zariski O. Algebraic surfaces. 2nd edition.— Springer Verlag. 1971.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

240. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий.— УМН, 1978, т. 33, вып. 2, с. 85—135.
241. Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k , D_k , E_k и лагранжевы особенности.— Функц. анализ, 1972, т. 6, вып. 4, с. 3—25.
242. Гивенталь А. Б. Асимптотика формы пересечений для квазиоднородных особенностей.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 4, с. 63—65.
243. Манин Ю. И. Алгебраические кривые над полями с дифференцированием.— Изв. АН СССР, серия матем., 1958, т. 22, с. 737—756.
244. Манин Ю. И. Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями.— Изв. АН СССР, серия матем., 1963, т. 27, с. 1395—1440.
245. Закалюкин В. М. Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра.— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 2, с. 69—70.
246. Петровский И. Г. О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений.— Изв. АН СССР, серия матем., 1944, т. 8, вып. 3, с. 101—106.
247. Атья М. Ф., Ботт Р., Гординг Л. Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.— УМН, 1971, т. 26, вып. 2, с. 25—100.
248. Garding L. Sharp fronts of paired oscillatory integrals.— Publ. Res. Inst. Math. Sci., Ser. A, 1977, v. 12, p. 53—68.
249. McKay J. Cartan matrices, finite groups of quaternions, and Kleinian singularities.— Proc. Amer. Math. Soc., 1981, v. 81, № 1, p. 153—154.
250. Basset A. B. The maximum number of double points on a surface.— Nature, 1906, v. 73, p. 246.
251. Beauville A. Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans P^3 ($\mu(5)=31$).— Journées de géométrie algébrique d'Angers, Algebraic Geometry Angers 1979, Sythoff and Noordhoff, 1980, p. 207—215.
252. Bruce J. An upper bound for the number of singularities on a projective hypersurface.— Bull. London Math. Soc., 1981, v. 13, № 1, p. 47—50.
253. Stagnaro E. Sul massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica di P^3 .— Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1978, v. 59, p. 197—198.
254. Варченко А. Н. Спектр и распадаения критической точки функции.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 2, 267—270.
255. Варченко А. Н. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 6, 1294—1297.
256. Варченко А. Н. О полунепрерывности комплексного показателя особенности.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 4, с. 77—78.

257. В а р ч е н к о А. Н. Об изменении дискретных характеристик критических точек функций при деформациях.— УМН, 1983, т. 38, вып. 5, с. 126—127.
258. Г и в е н т а л ь А. Б. О максимуме числа особых точек на проективной гиперповерхности.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 3, с. 73—74.
259. Г у с е й н - З а д е С. М., Н е х о р о ш е в Н. Н. О примыканиях особенностей A_k к точкам страта $\mu = \text{const}$ особенности.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 4, с. 82—83.
260. А р н о л ь д В. И. Теория катастроф.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
261. А р н о л ь д В. И. Особенности в вариационном исчислении.— Итоги науки, Современные проблемы математики, 1983, т. 22, с. 3—55.
262. А р н о л ь д В. И. Особенности систем лучей.— УМН, 1983, т. 38, вып. 2, с. 77—147.
263. А р н о л ь д В. И. Исчезающие перегибы.— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 3, с. 58—59.
264. В а р ч е н к о А. Н. Асимптотики интегралов и структуры Ходжа.— Итоги науки, Современные проблемы математики, 1983, т. 22, с. 130—166.
265. В а р ч е н к о А. Н. Оценка числа нулей вещественного абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы.— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 2, с. 1—13.
266. В а р ч е н к о А. Н. О локальном вычете и форме пересечений в исчезающих когомологиях.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1984, т. 48, вып. 5, с. 1010—1035.
267. В а р ч е н к о А. Н., Г у с е й н - З а д е С. М. Топология каустик, волновых фронтов и вырождения критических точек.— УМН, 1984, т. 39, вып. 2, с. 190—191.
268. В а р ч е н к о А. Н., Ч м у т о в С. В. Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, суть группы монодромии подходящих особенностей.— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 3, с. 1—14.
269. В а с и л ь е в В. А. Самопересечения волновых фронтов и лежандровы (лагранжевы) характеристические числа.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 2, с. 68—69.
270. В о р о н и н С. М. Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 2, с. 21—29.
271. Г и в е н т а л ь А. Б. Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые sl_2 -модули.— УМН, 1983, т. 38, вып. 6, с. 123—124.
272. Г о р ю н о в В. В. Проектирования 0-мерных полных пересечений на прямую и $K(\mathbb{P}, 1)$ -гипотеза.— УМН, 1981, т. 37, вып. 3, с. 179—180.
273. Г о р ю н о в В. В. Бифуркационные диаграммы некоторых простых и квазиоднородных особенностей.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 2, с. 23—37.
274. Г у с е й н - З а д е С. М. Индекс особой точки градиентного векторного поля.— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 1, с. 7—12.
275. Д а в ы д о в А. А. Граница достижимости многомерной управляемой системы.— Тр. Тбилисского ун-та, 1982, т. 232—233, вып. 13—14, с. 78—96.
276. Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 22.— М.: ВИНТИ, 1983.
277. К у л и к о в В. С. Исчисление особенностей вложения общей алгебраической поверхности в проективное пространство $\mathbb{P}^3$.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 3, с. 15—27.
278. Л а н д и с Е. Е. Тангенциальные особенности в контактной геометрии.— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 96.
279. Л е в а н т о в с к и й А. В. Особенности границы области устойчивости.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 1, с. 44—48.
280. Л е в а н т о в с к и й А. В. О границе множества устойчивых матриц.— УМН, 1982, т. 35, вып. 2, с. 213—214.
281. Л е в а н т о в с к и й А. В. Об особенностях границы устойчивости.— Вестник МГУ, сер. матем., 1980, вып. 6, с. 20—22.
282. Л я ш к о О. В. Классификация критических точек на многообразии с особым краем.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 3, с. 28—36.

283. М а т о в В. И. Об унимодальных ростках функций на многообразии с краем.— Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 1, с. 69—70.
284. М а т о в В. И. Унимодальные и бимодальные ростки функций на многообразии с краем.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1981, вып. 7, с. 174—189.
285. М а т о в В. И. Особенности функций максимума на многообразии с краем.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1981, вып. 6, с. 195—222.
286. М а т о в В. И. Топологическая классификация ростков функций максимума и минимума семейств функций общего положения.— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 129—130.
287. П е т р о в Г. С. О числе нулей эллиптических интегралов.— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 2, с. 87—88.
288. П л а т о н о в а О. А. Особенности проектирований гладких поверхностей.— УМН, 1984, т. 39, вып. 2, с. 149—150.
289. П л а т о н о в а О. А. Проектирование гладких поверхностей.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1984, вып. 10.
290. С е д ы х В. Д. Особенности выпуклых оболочек.— Сиб. матем. ж., 1983, т. 24, вып. 3, с. 158—175.
291. С е д ы х В. Д. Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2.— Матем. сб., 1982, т. 119, вып. 2, с. 233—247.
292. Х о в а н с к и й А. Г. Вещественные аналитические многообразия со свойствами конечности и комплексные абелевы интегралы.— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 2, с. 45—58.
293. Ш о ш и т а й ш в и л и А. Н. Об аналитических множествах, биголоморфно эквивалентных квазиоднородным.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 2, с. 92—93.
294. Щ е р б а к И. Г. Об изолированных особенностях полных пересечений.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, с. 230—239.
295. Щ е р б а к И. Г. Фокальное множество поверхности с краем и каустики групп, порожденных отражениями, B_k , C_k , F_4 .— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 1, с. 94—95.
296. Щ е р б а к И. Г. Двойственность краевых особенностей.— УМН, 1984, т. 39, вып. 2, с. 220—221.
297. Щ е р б а к О. П. Особенности фронтальных отображений подмногообразий проективного пространства.— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 95—96.
298. Щ е р б а к О. П. Проективно двойственные пространственные кривые и лежандровы особенности.— Тр. Тбилисского ун-та, 1982, т. 232—233, вып. 13—14, с. 280—336.
299. Щ е р б а к О. П. Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3 , порожденная отражениями.— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 4, с. 70—72.
300. A r n o l d V. I. Singularities of ray systems.— ICM, Warsaw, 1983.
301. A r n o l d V. I. Some open problems in the theory of singularities.— Proc. of Symp. in Pure Math., 1983, v. 40, part 1, p. 57—69.
302. A r n o l d V. I. Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle.— Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1982, v. 2, p. 301—309.
303. A r n o l d V. I., S h a n d a r i n S. F., Z e l d o v i c h Y. B. The large scale structure of the universe. I.— Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 1982, v. 20, p. 111—130.
304. A u d i n M. Quelques remarques sur certains groupes de cobordisme lagrangien.— Univ. Paris-Sud., 1983, p. 1—16.
305. A u d i n M. Classes caracteristiques d'immersions lagrangiennes definies par des varietes de caustiques (d'apres Vasiliev).— Univ. Paris-Sud., 1983, p. 1—16.
306. A u d i n M. Remarques sur les nombres caracteristiques entiers de certaines immersions lagrangiennes.— C. r. Acad. Sci., 1983, November.

307. Brieskorn E. Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten.— Bonner Mathematische Schriften, 1983, № 150, p. 1—225.
308. Bruce J. Counting singularities.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1982, A93, № 1—2, p. 137—159.
309. Bruce J., Gaffney T. Simple singularities of mappings $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$.— J. London Math. Soc., 1982, v. 26, № 3, p. 465—474.
310. Chmutov S. V. The monodromy groups of critical points of function. II.— Invent. math., 1983, v. 73, p. 491—510.
311. Damon J. Topological stability in the nice dimensions.— Topology, 1979, v. 18, p. 129—142.
312. Damon J. Finite determinacy and topological triviality. II: sufficient conditions and topological stability.— Comp. Math., 1982, v. 47, № 2, p. 101—132.
313. Damon J., Gaffney T. Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations.— Invent. Math., 1983, v. 72, p. 335—358.
314. Dimca A. Germes de fonction definier sur les singularités isolées d'hyper-surfaces.— C. r. Acad. Sci., 1983, v. 297, № 2, p. 217—219.
315. Dimca A., Gibson C. Contact unimodular germs from the plane to the plane.— Quart. J. Math., 1983, 34, № 135, p. 281—295.
316. Drucker D., Frohardt D. Irreducible root systems and finite linear groups of degree two.— Bull. London Math. Soc., 1982, v. 14, № 2, p. 142—148.
317. Dufour J. Familles des courbes planes differentiables.— Topology, 1983, v. 22, № 4, p. 449—479.
318. Durfee A. Fifteen characterisations of rational double points and simple critical points.— L'Enseignement Math., 1979, v. 25, № 1—2, p. 131—163.
319. Ebeling W. Quadratische Formen und Monodromie-Gruppen von Singularitäten.— Math. Ann., 1981, v. 255, p. 463—498.
320. El Zein F. Degenerescence diagonale. I.— C. r. Acad. Sci., 1983, t. 296, p. 51—54; II.— C. r. Acad. Sci., 1983, v. 276, p. 199—202.
321. Knorrer H. Zum $K(\pi, 1)$ -Problem für isolierte Singularitäten von volligen Durchschnitten.— Comp. Math., 1982, v. 45, № 3, p. 333—340.
322. Laufer H. Ambient deformations for exceptional sets in twomanifolds.— Invent. Math., 1979, v. 55, p. 1—36.
323. Le D. T., Saito K. The local π_1 of the complement of a hypersurface with normal crossings in codimension 1 is abelian.— RIMS, 1981, p. 1—31.
324. Le D. T., Teissier B. Varietes polaires locales et classes de Chern des varietes singulieres.— Ann. of Math., 1981, v. 114, p. 457—491.
325. Le D. T., Teissier B. Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney. II.— Proc. of Symp. in Pure Math., 1983, v. 40, part 2, p. 65—103.
326. Mather J., Yau St. S.-T. Classification of Isolated Hupersurface singularities by their Moduli Algebras.— Invent. Math., 1982, v. 69, p. 243—252.
327. Nguyen huu Duc, Nguyen tien Dai. Stabilité de l'interaction geometrique entre deux composantes holonomes simples.— C. r. Acad. Sci., 1980, t. 291, p. 113—116.
328. Perron P. « μ constant» implique «type topologique constant» en dimension complexe trois.— C. r. Acad. Sci., 1982, v. 295, p. 735—738.
329. Pham F. Structures de Hodge mixtes assosiees a un germe de fonction a point isole.— Asterisque, 1983, № 101—102, p. 268—285.
330. Randall J. D. Topological sufficiency of smooth map-germs.— Invent. Math., 1982, v. 67, p. 117—122.
331. Saito K. A characterization of the intersection form of a Milnor's fiber for a function with an isolated ciritical point.— Proc. Japan Acad., 1982, v. 58, ser. A, № 2, p. 79—81.
332. Saito K. On the Period of Primitive Integrals. I.— RIMS, 1982, p. 1—235.
333. Saito K. The zeroes of characteristic function χ_f for the exponents of a hypersurface isolated singular point.— Advanced Studies in Pure Math., 1982, v. 1, p. 193—215.

- 334. S a i t o K. Period mapping associated to a Primitive form.— Preprint, 1983.
- 335. S a i t o M. Exponents of a reduced and irreducible plane curve singularity.— Preprint, 1982.
- 336. S a i t o M. Exponents and the geometric genus of an isolated hypersurface singularity.— Proc. of Symp. in Pure Math., 1983, v. 40, part 2, p. 465—472.
- 337. S a i t o M. Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities.— Inst. Fourier, Grenoble, 1983, p. 1—10.
- 338. S a i t o M. On the structure of Brieskorn lattices.— Inst. Fourier, Grenoble, 1983, p. 1—28.
- 339. S c h e r k J. A propos d'une theoremè de Mather et Yau.— C. r. Acad. Sci., 1983, v. 296, № 12, p. 513—515.
- 340. S i e r s m a D. Isolated line singularities.— Proc. of Symp. in Pure Math., 1983, v. 40, part 2, p. 485—496.
- 341. Singularities.— Proc. of Symp. in Pure Math., 1983, v. 40, parts 1—2.
- 342. S l o d o w y P. Simple singularities and simple algebraic groups.— Lect. Notes in Math., 1980, № 815, p. 1—175.
- 343. S t e e n b r i n k J. Semicontinuity of the singularity spectrum.— Preprint 23, Math. Inst., Univ. of Leiden, 1983, p. 1—9.
- 344. Y a u St. S.-T. Solvable Lie algebras and Kac-Moody algebras arising from isolated singularities.— Univ. of Illinois, 1983, p. 1—94.
- 345. Y a u St. S.-T.— Milnor algebras and equivalence relations among holomorphic functions.— Bull. Amer. Math. Soc., 1983, v. 9, № 2, p. 235—239.
- 346. Y o s h i n a g a E., S u z u k i M. Normal forms of non-degenerated quasi homogeneous functions with inner modality ≤ 4 .— Invent. Math., 1979, v. 55, p. 185—206.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Г л а в а I. Топологическое строение изолированных критических точек функций	5
Введение	5
§ 1. Элементы теории Пикара — Лефшеца	11
§ 2. Топология неособого множества уровня и оператор вариации особенности	24
§ 3. Бифуркационные диаграммы и группа монодромии особенности	50
§ 4. Матрицы пересечений особенностей функций двух переменных	86
§ 5. Формы пересечений краевых особенностей и топология полных пересечений	103
Г л а в а II. Осциллирующие интегралы	123
§ 6. Обсуждение результатов	123
§ 7. Элементарные интегралы и разрешение особенностей фазы	158
§ 8. Асимптотики и многогранники Ньютона	170
§ 9. Показатели особости, примеры	193
Г л а в а III. Интегралы голоморфных форм по исчезающим циклам . . .	197
§ 10. Простейшие свойства интегралов	197
§ 11. Комплексные осциллирующие интегралы	216
§ 12. Интегралы и дифференциальные уравнения	229
§ 13. Коэффициенты разложений в ряд интегралов, весовая и ходжева фильтрации, спектр критической точки	253
§ 14. Смешанная структура Ходжа изолированной критической точки голоморфной функции.	278
§ 15. Отображение периодов и форма пересечений	306
Литература	321

Владимир Игоревич Арнольд
Александр Николаевич Варченко
Сабир Меджидович Гусейн-Заде

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
Монодромия и асимптотики интегралов

Редактор *В. В. Абгарян*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *О. М. Кривенко*

ИБ № 12220

Сдано в набор 28.10.83. Подписано к печати 09.02.84.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Условн. печ. л. 21. Условн. кр.-отт. 21.
Уч.-изд. л. 23,91. Тираж 8 000 экз. Заказ № 2368. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного
Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано в типографии № 2 издательства «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 10
Заказ № 31.

— ООООБЕЖИДИРУЕМЫХ ОТОБРАЖИЙ